

早稲田大学 正員 平嶋 政治  
 首都高速道路公団 正員 内藤 誠一  
 首都高速道路公団 正員 〇恵 谷 舜吾

1. まえがき

薄肉立体曲線部材の基礎方程式を定式化する際、部材の母線が曲率とねじれ率を持つている為、通常その誘導過程が非常に複雑となる。しかしベクトル解析の手法を用いるならば、基本式の定式化は直線部材の場合と同型式に行うことができる。基本式の誘導に於いて使用する仮定は (1)変形により断面形は変わらない。(2)断面形は母線方向に等断面である。(3)曲げ変形に対しては平面保持則が成立する。(4)中央平面上には剪断変形を生じない。(5)肉厚方向にも剪断変形を生じない。(6)曲率、ねじれ率の2乗の項は1に比較して十分小さい。(7)断面形は有限個の特異点を除いて十分滑らかである。(8)変形は微小変形である。

2. 変位とひずみの関係

2-1) 変形前の幾何量 棒軸の位置ベクトルを次式で表わす。  $R = x_m(\theta) \hat{e}_m$  (1)

(1)式を微分することにより棒軸の  $\theta$ -軸方向の単位ベクトルを得る。

$$t = R_{,1} (= n_3) \quad (2)$$

又、 $n_1, n_2$ を断面の主軸方向の単位ベクトルとする。フルネーセレーの公式より、棒軸の流動座標系の基本ベクトルの微分は次式である。

$$\begin{bmatrix} n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ t_{,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ t \end{bmatrix} \quad (3)$$

但し、 $k_1 = n_1 \cdot (t \times n_{2,1}), k_2 = n_2 \cdot (t \times n_{1,1})$ ; 主軸方向の曲率

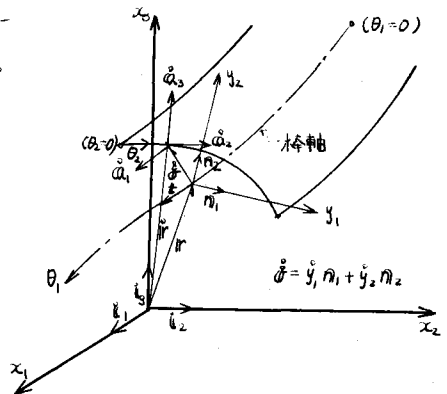
$k_3 = t \cdot (n_1 \times n_{2,1})$ ; 棒軸のねじれ率

中央平面上の位置ベクトルは次式で与えられている

$$r = R + \tilde{r} = R + \tilde{y}_i n_i \quad (4)$$

(4)式より中央平面上の基本ベクトルは次式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 = \tilde{r}_{,1} &= (-k_2 \tilde{y}_1 + k_1 \tilde{y}_2) t - k_1 \tilde{y}_2 n_1 + k_2 \tilde{y}_1 n_2 \\ \tilde{a}_2 = \tilde{r}_{,2} &= \tilde{y}_{1,2} n_1 + \tilde{y}_{2,2} n_2 \\ \tilde{a}_3 &= -\tilde{y}_{2,2} n_1 + \tilde{y}_{1,2} n_2 \quad (\tilde{a}_3 \text{は棒軸の法平面上にとってある}) \end{aligned} \quad (5)$$



断面内の任意点の位置ベクトル、及び基本ベクトルは(4)式と同様に次式で表わされる。

$$R = R + \tilde{r} + z \tilde{a}_3 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} a_1 = R_{,1} &= \{ (1 - k_2 \tilde{y}_1 - \tilde{y}_{1,2} z) + k_1 (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_{1,2} z) \} t - k_1 (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_{1,2} z) n_1 + k_2 (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_{2,2} z) n_2 \\ a_2 = R_{,2} &= (\tilde{y}_{1,2} - \tilde{y}_{2,2} z) n_1 + (\tilde{y}_{2,2} + \tilde{y}_{1,2} z) n_2 \\ a_3 = R_{,3} &= \tilde{a}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

2-2) 変形後の幾何量 変形後の位置ベクトル ( $\tilde{R}$ ) は  $\tilde{R} = R + \omega$  ( $\omega$ 変位ベクトル)で表わされる。

変位ベクトル( $\omega$ )は、平面保持の仮定の下に次式で表わされる。

$$\omega = \{ u - (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_{1,2} z) \psi \} n_1 + \{ v + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_{2,2} z) \psi \} n_2 + \{ \omega_0 + \omega + (\tilde{y}_2 + \tilde{y}_{1,2} z) \varphi - (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_{2,2} z) \psi \} t \quad (8)$$

但し、 $\omega_0$ ; 断面全体の  $\theta$ -軸方向変位、 $\omega$ ; そり変位、 $u$ ;  $y_1$ -軸方向の変位、 $v$ ;  $y_2$ -軸方向の変位、

$\varphi$ ;  $y_1$ -軸まわりの断面の回転変位、 $\psi$ ;  $y_2$ -軸まわりの断面の回転変位、 $\psi$ ;  $\theta$ -軸まわりの回転変位、

変位後の基本ベクトルは、(8)式を微分し、(6)式に追加合わせるにより次に示す式となる。

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{R}_{1z} = \alpha_1 + v^i l_{1z} n_i, \quad \bar{\alpha}_2 = \bar{R}_{2z} = \alpha_2 + v^i l_{2z} n_i, \quad \bar{\alpha}_3 = \bar{R}_{3z} = \alpha_3 + v^i l_{3z} n_i \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } v^1_1 &= u_1 - (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) v^1_1 - h \{ v + (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) \psi \} + k_2 \{ w_0 + w + (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) \varphi - (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) \psi \} \\ v^2_1 &= v_1 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) v^2_1 - h \{ u - (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) \psi \} - k_1 \{ w_0 + w + (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) \varphi - (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) \psi \} \\ v^3_1 &= w_{01} + w_{11} + (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) \varphi_{11} - (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) \psi_{11} - k_2 \{ u - (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) \psi \} + k_1 \{ v + (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) \psi \} \\ v^1_2 &= -(\dot{y}_{2,2} + \dot{y}_{1,2,2} z) \psi, \quad v^2_2 = (\dot{y}_{1,2} - \dot{y}_{2,2,2} z) \psi, \\ v^3_2 &= w_{2z} + (\dot{y}_{2,2} + \dot{y}_{1,2,2} z) \varphi - (\dot{y}_{1,2} - \dot{y}_{2,2,2} z) \psi \\ v^1_3 &= -\dot{y}_{1,2} \psi, \quad v^2_3 = -\dot{y}_{2,2} \psi, \quad v^3_3 = w_{3z} + \dot{y}_{1,2} \varphi + \dot{y}_{2,2} \psi \quad \text{但し } l_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij} n_j \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2-3) vが0のグリーンのひずみテンソルは次式で定められている。

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_{\alpha\beta} - \alpha_{\alpha\beta}), \quad r_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_{\alpha 3} - \alpha_{\alpha 3}) \quad \text{但し } \alpha_{\alpha\beta} = \alpha_\alpha \cdot \alpha_\beta \quad (11)$$

$$(11) \text{式を(9)式を代入する事により } r_{11} = \alpha_1 \cdot \alpha_1, \quad r_{12} = \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \cdot \alpha_1), \quad r_{13} = \frac{1}{2} (\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_3 \cdot \alpha_1) \quad (12)$$

仮定(4), (5), (6)より、下記の条件式を得る。

$$r_{13} = \frac{1}{2} (\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_3 \cdot \alpha_1) = 0 \quad \text{より}$$

$$0 = \{ 1 - k_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) + k_1 (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) \} \times w_{3z} - (k_2 \dot{y}_{2,2} + k_1 \dot{y}_{1,2}) + (\dot{y}_2 \dot{y}_{2,2} + \dot{y}_1 \dot{y}_{1,2}) \times (v^1_1 - k_2 \varphi + k_1 \psi) + \dot{y}_{1,2} (\varphi + v^1_1 - h u - k_1 w_0) + \dot{y}_{2,2} (\psi - u_1 + h v - k_2 w_0) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{2} (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_2 \cdot \alpha_1) \quad (\text{但し } z=0 \text{ では } r_{12}=0) \\ &= \frac{1}{2} \{ 1 - k_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) + k_1 (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) \} \times w_{2z} + \frac{1}{2} \{ k_2 (\dot{y}_{2,2} - \dot{y}_{2,2,2} z) - k_1 (\dot{y}_{2,2} + \dot{y}_{1,2,2} z) \} \times w \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ -(\dot{y}_{1,2} - \dot{y}_{2,2,2} z) (\dot{y}_2 + \dot{y}_{2,2} z) + (\dot{y}_{2,2} + \dot{y}_{1,2,2} z) (\dot{y}_1 - \dot{y}_{2,2} z) \} \times (v^2_1 - k_2 \varphi + k_1 \psi) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\dot{y}_{1,2} - \dot{y}_{2,2,2} z) (u_1 - h v - \psi + k_2 w_0) + \frac{1}{2} (\dot{y}_{2,2} + \dot{y}_{1,2,2} z) (v^1_1 + h u + \varphi - k_2 w_0) \end{aligned} \quad (14)$$

通常の直線梁の解析と同様に、梁としての剪断変形を考慮しない事とすれば  $\varphi = -v^1_1 + h u + k_1 w_0$ ,  $\psi = u_1 - h v + k_2 w_0$  となり、(13)式(14)式の最後の2項は0となる。(13)式を積分する事により次式を得る。

$$w = w_m(z=0) - \frac{(\dot{y}_2 \dot{y}_{2,2} + \dot{y}_1 \dot{y}_{1,2}) z}{1 - k_2 \dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2} \times (v^1_1 - k_2 \varphi + k_1 \psi) \quad (15)$$

又  $w_m$  は(14)式で  $z=0$  として積分することにより次の様に定まる。

$$w_m = - (1 - k_2 \dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2) \times \int_0^{z_2} \frac{-\dot{y}_2 \dot{y}_{2,2} + \dot{y}_{2,2} \dot{y}_1}{(1 - k_2 \dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2)^2} dz + \bar{w}_m \quad (\text{但し } \bar{w}_m \text{ は } z=0 \text{ の点の値}) \quad (16)$$

又、 $\dot{y}_2 \dot{y}_{2,2} + \dot{y}_1 \dot{y}_{1,2} = r_{11}$  (中央平面の法線への距離),  $-\dot{y}_2 \dot{y}_{2,2} + \dot{y}_{2,2} \dot{y}_1 = r_{12}$  (中央平面の法線への距離)である。

ねじり変形による剪断ひずみは、(15)式(16)式を(14)式へ代入し、曲率及びねじれ率の2次以上の項、又仮定(7)より  $\dot{y}_{1,2,2}$ の項を省略することにより次式となる。

$$r_{12} = \left[ - \left\{ 2 - 2 \frac{(k_2 \dot{y}_{2,2} + k_1 \dot{y}_{2,2}) \dot{y}_1}{1 - k_2 \dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2} + \frac{(k_2 \dot{y}_{2,2} + k_1 \dot{y}_{1,2}) \dot{y}_1}{1 - k_2 \dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2} \right\} z - \frac{k_2 \dot{y}_{2,2} + k_1 \dot{y}_{2,2}}{1 - k_2 \dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2} z^2 \right] (v^1_1 - k_2 \varphi + k_1 \psi) \quad (17)$$

### 3. 応力

薄肉断面であるので、軸方向応力は、肉厚方向に等分布していると仮定すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \times \frac{r_{11}}{\alpha_1} \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \times \frac{1}{(1 - k_2 \dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2)^2} \times \left[ w_{01} + w_{11} - u k_2 + v k_1 + \dot{y}_1 \{ -\psi_1 - k_2 (w_{01} + w_{11}) + h v_1 + k_2 v^2 \} \right. \\ &\quad + (k_2^2 + h^2) u - k_1 k_2 v - k_1 h (w_0 + w_1) \} + \dot{y}_2 \{ \varphi_1 + k_1 (w_{01} + w_{11}) - h u_1 + k_2 v^2 - k_1 k_2 u + (k_2^2 + h^2) v - k_2 h (w_0 + w_1) \} \\ &\quad + \dot{y}_2^2 \{ k_2 \psi_1 + h v^1_1 + k_1 h \psi - k_1 k_2 v \} + \dot{y}_2^2 \{ k_1 \varphi_1 + h v^2_1 - k_2 h \varphi + k_1 k_2 v \} \\ &\quad + \dot{y}_1 \dot{y}_2 \{ -k_2 \varphi_1 - k_1 \psi_1 - k_1 h \varphi + k_2 h \psi + (k_2^2 - k_1^2) v \} \end{aligned} \quad (18)$$

上式において曲率、ねじれ率の2次以上の項を省略する事により近似式を得る。

(18)式で与えられる軸方向応力に釣り合う剪断応力は次の様に計算できる。ここで  $n_{11} = \int_{-z}^z \sigma_{11} dz$  ( $\sigma$ は肉厚)とすると、微小要素(厚さ  $z$ )に作用する応力は次の様に表わされる。

\*1) 文献3の結果と等しい。

$$T_1 = (n_{11} \frac{\partial_1}{|\partial_1|} + n_{12} \frac{\partial_2}{|\partial_2|}) \quad (19)$$

$$T_2 = (-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2) \times n_{12} \frac{\partial_1}{|\partial_1|} \quad (20)$$

(Fig 2)より釣り合い式は次式で示される。

$$(\partial T_1 / \partial \theta) d\theta + (\partial T_2 / \partial \theta) d\theta = 0 \quad (21)$$

(20)式へ(19)式、(20)式を代入して棒軸方向の力の釣り合い条件より

$$\text{次式を得る。} \quad n_{11} b_1 + (-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2) M_{2,2} + 2(-k_2 \dot{q}_{1,2} + k_1 \dot{q}_{2,2}) M_{1,2} \quad (22)$$

(20)式を積分することにより、軸方向応力に釣り合い前断応力は次式となる。

$$n_{12} = - \frac{1}{(-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2)} \left[ \int_0^{\theta_2} (-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2) n_{11,1} d\theta_2 + \bar{n}_{12} \right] \quad (\text{但し } \bar{n}_{12} \text{ は } \theta_2=0 \text{ の点の値}) \quad (23)$$

前断応力は(19)式で与えられている。前断ひずみによつてのと合せて次式で示される。

$$\tau_{12} = - \frac{1}{-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2} \left\{ G \left[ 2 - 2 \frac{(-k_2 \dot{q}_{1,2} + k_1 \dot{q}_{2,2}) \dot{q}_1}{-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2} + \frac{(k_2 \dot{q}_{1,2} + k_1 \dot{q}_{2,2}) \dot{q}_2}{-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2} \right] \Delta \times (-k_2 \psi + k_1 \psi) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma(-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2)} \left[ \int_0^{\theta_2} (-k_2 \dot{q}_1 + k_1 \dot{q}_2) n_{11,1} d\theta_2 + \bar{n}_{12} \right] \right\} \quad (\text{但し(19)式の } \Delta \text{ の項は小さいので省略した}) \quad (24)$$

4. 断面力。 (18)式(24)式で与えられる応力は次の様にベクトル表示できる。

$$n_{11} = n_{11} \partial_1 / |\partial_1| = n_{11} (\psi - k_2 \dot{q}_1 n_1 + k_1 \dot{q}_1 n_2), \quad n_{12} = n_{12} \partial_2 / |\partial_2| = n_{11} (\dot{q}_{1,2} n_1 + \dot{q}_{2,2} n_2) \quad (25)$$

(25)式を利用して断面力は次の様にして求めることができる。(記号については(Fig 3)参照)

$$\left. \begin{aligned} N_t &= \int_{\theta_2} n_{11} d\theta_2, & M_1 &= \int_{\theta_2} n_{11} \dot{q}_2 d\theta_2, & M_2 &= \int_{\theta_2} n_{11} \dot{q}_1 d\theta_2 \\ Q_1 &= \int_{\theta_2} (-n_{11} k_2 \dot{q}_2 + n_{12} \dot{q}_{1,2}) d\theta_2, & Q_2 &= \int_{\theta_2} (n_{11} k_1 \dot{q}_1 + n_{12} \dot{q}_{2,2}) d\theta_2 \\ M_t &= - \int_{\theta_2} n_{11} k_2 \dot{q}_2 d\theta_2 + \int_{\theta_2} n_{11} k_1 \dot{q}_1 d\theta_2 + \int_{\theta_2} n_{12} \dot{q}_2 d\theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

### 5. 釣り合い方程式 (文献2)

(26)式で示されている断面力は次の様に棒軸に関して

表示できる。

$$\left. \begin{aligned} N &= N_t \psi + Q_1 n_1 + Q_2 n_2 \\ M &= M_t \psi + M_1 n_1 + M_2 n_2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

外力も棒軸に作用しているものとすると同様に

$$\left. \begin{aligned} P &= P_t \psi + P_1 n_1 + P_2 n_2 \\ m &= m_t \psi + m_1 n_1 + m_2 n_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

釣り合い式は次式である。

$$M_{s,1} + P = 0, \quad M_{s,1} + \psi \times N + M = 0 \quad (29)$$

(Fig 3)

(29)式へ(27)式(28)式を代入することにより次式を得る。

$$N_{t,1} = k_2 Q_1 - k_1 Q_2 - P_t, \quad Q_{1,1} = -k_2 N_t + k_1 Q_2 - P, \quad Q_{2,1} = k_1 N_t - k_2 Q_1 - P_2$$

$$M_{t,1} = k_2 M_1 - k_1 M_2 - m_t, \quad M_{1,1} = -k_2 M_t + k_1 M_2 + Q_2 - M, \quad M_{2,1} = k_1 M_t - k_2 M_1 - Q_1 + m_2$$

6. あとがき 断面力、釣り合い式の詳細な検討については、講演会当日報告する予定である。

参考文献

- 1) Allgemeine Stabilitätstheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgekrümmten Trägers mit großen Verformungen. F.H. Schwedler (Ingenieur-Archiv 39, 1970),
- 2) Die Theorie II Ordnung von Krümmen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers. 波田凱夫 (土木学会論文報告集 155号 1968)
- 3) 初基曲率、ねじり率を有する薄肉断面曲線付りの基礎方程式。築地恒夫 (土木学会論文報告集 230号 1974)