I-143　　薄肉多室閉断面梁の弾塑性曲げ捩り（その1）

九州大学　正　員　太 田 俊 昭
〃　　学生員　○藤 岡 健 三

1．まえがき

薄肉多室閉断面桁の捩り解析法としては、セン断流理論ならびに有限要素法等による解法があり、前者に対する既往研究としては、小松・崎本氏のWarping を無視した、いわゆる *St. Venant* の単純ねじりセン断流のみを考慮した研究[1] および著者らの単純Warping 理論[2),3)]を拡張したものがある。　一般に薄肉多室閉断面の捩り挙動には、Warpingを無視できないが、なかんずく塑性領域では、これまで微小と考えられていたWarping に及ぼす二次セン断ひずみの影響も大となり、これを無視した単純Warping 理論では、Warping Moment の大きい固定端部で解が早期に発散してしまうことになる。　そこで、本研究では補正関数 f を導入することにより、Warping関数を予め補正して、解の早期発散を防ぐとともに固定条件（$w=0$）を、すっきりした形で与えられる解法を提案した。　誘導補正関数 f は、弾性範囲内では、Benscoterが *Galerkin* 法より導いたもの[4)]と全く同一関数で求められた。　以下に理論の骨子と計算結果の一部を報告する。

2．基礎理論

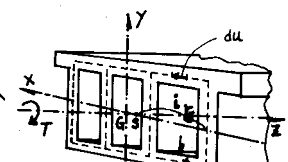

図-1

捩りモーメントをT，捩れ率を θ とすれば、セン断応力増分 $\dot{\tau}$，曲げ捩り応力増分 $\dot{\sigma}_{\bar{w}}$ は一般に次の式で与えられる。（注；以下増分は略す）

$$\dot{\tau} = G\dot{\gamma} - 2\tau G\dot{\lambda} \quad , \quad \dot{\sigma}_{\bar{w}} = E\dot{\varepsilon}_w - \tfrac{2}{3}\sigma_{\bar{w}}E\dot{\lambda} \text{ -------- (1)}$$

ここで塑性時定数 $\dot{\lambda}$ は、*Mises*の条件式により決定される。　ところで、単純Warping 理論による断面の反り w は、弾性時に於いては次のように求められる

$$\dot{w} = \dot{\theta}\cdot W_u \text{ ------------ (2)}$$

ここで、反り w を、f を θ の適当な補正関数として次式のように導入する。

$$\dot{w} = \dot{f}\cdot(W_u + \dot{w}_i^p + \dot{w}_o^p) \text{ -------- (3)}$$

（ただし　$W_u' = \int_0^u K_s/t\,du - \int_0^u r_s\,du$　，　K_s；捩りセン断流関数，　r_s；セン断中心より断面への法線長さ．　$\dot{f}\cdot\dot{w}_i^p = \int_0^u \dot{\gamma}^p\,du$　，　$\dot{\gamma}^p$；塑性セン断ひずみ）

この時、反り $\dot{w}$ によって生じる垂直曲げひずみ $\dot{\varepsilon}_w$ は、

$$\dot{\varepsilon}_w = \frac{d\dot{w}}{dZ} = \frac{d\dot{f}}{dZ}W_u + \frac{d}{dZ}(\dot{f}\dot{w}_i^p) + \frac{d}{dZ}(\dot{f}\cdot\dot{w}_o^p) \text{ -- (4)}$$

式(4)中の $\frac{d}{dZ}(\dot{f}\dot{w}_o^p)$ は、断面の自己平衡系という条件より求められる。

$$\frac{d}{dZ}(\dot{f}\dot{w}_o^p) = \frac{2}{3EA_0}\int_A \sigma_{\bar{w}}\cdot E\cdot\dot{\lambda}\,dA - \frac{1}{A_0}\int_A \frac{d}{dZ}(\dot{f}\cdot\dot{w}_i^p)\,dA \text{ ------------- (5)}$$

式(5)，式(4)を式(1)に代入することにより、曲げ捩れ応力 $\dot{\sigma}_{\bar{w}}$ は、次の式で与えられる。（$W_u = W_u' - \frac{1}{A_0}\int_0^u W_u'\,dA$）

$$\dot{\sigma}_{\bar{w}} = E\frac{d\dot{f}}{dZ}W_u + \dot{\sigma}_{\bar{w}}^p \text{ ------------ (6)}$$

$$\dot{\sigma}_{\bar{w}}^p = \frac{2E}{3A_0}\int_A \sigma_{\bar{w}}\dot{\lambda}\,dA - \frac{2}{3}\sigma_{\bar{w}}E\dot{\lambda} + E\frac{d}{dZ}(\dot{f}\cdot\dot{w}_i^p) + \frac{1}{A_0}\int_A\frac{d}{dZ}(\dot{f}\dot{w}_i^p)\,dA \text{ ------------- (7)}$$

ここで、セン断流の概念　$q = t\tau$　を導入すると、$\dot{q}^*$ を不静定セン断流として次の式が成立する。

$$\dot{q} = \dot{q}^* - \int_0^u t\cdot\frac{d\dot{\sigma}_{\bar{w}}}{dZ}\,du \text{ ------ (8)}$$

この $\dot{q}^*$ は，閉断面 i の変形の適合条件より次式で決定される。

$$a_i\dot{q}_i^* - \Sigma b_{ij}\dot{q}_j^* = \oint\frac{d\dot{\sigma}_{\bar{w}}}{dZ}t\cdot du + 2G\dot{\theta}A_i - 2\oint qG\dot{\lambda}\frac{du}{t} + 2\Sigma q_j^*\int_{ij}G\dot{\lambda}\frac{du}{t} \text{ --------- (9)}$$

（ただし、$a_i = \oint_i \frac{du}{t}$，$b_{ij} = \int_{ij}\frac{du}{t}$　）　よって式(8)に、式(7)，式(9)を代入し整理すると次式をえる。

$$\dot{q} = \bar{q}_{se}\cdot G\cdot\dot{\theta} - E\frac{d^2\dot{f}}{dZ^2}\bar{q}_{we} + \dot{q}_P \text{ ------------ (10)}$$

（ただし、$\bar{q}_{se} = K_s$　，　$\bar{q}_{we} = \int_0^u W_u\cdot t\cdot du - \frac{1}{a_i}\oint\int_0^u W_u\cdot t\cdot du\cdot du$　，　$\dot{q}_P$；塑性セン断流）

ここで　$\dot{T} = \int_A r_s\cdot\dot{q}\,du$　であるから，　$\mathcal{J} = 2\Sigma K_s A_i$　，　$C_w = \int r_s\cdot\bar{q}_{we}\,du = \int W_u^2\cdot t\cdot du$　とおけば、

$$\dot{T} = G\mathcal{J}\cdot\dot{\theta} - EC_w\cdot\frac{d^2\dot{f}}{dZ^2} + \dot{T}_i^p \text{ ------------ (11)}$$

式(11)の右辺オ一項は、St.Venantの弾性捩りモーメント，オ二項は補正された曲げ捩りモーメント，オ三項は $\dot{T}_1^p=\int_A \dot{g}_p\cdot r_s\,du$ なる塑性捩りモーメントである。

一方、式(1)より，$\dot{g}=t\dot{\tau}=t\cdot(\dot{\gamma}G-2\tau G\dot{\lambda})$ ---------(12)

歪の適合条件式は，$\dot{\gamma}=\frac{\partial\dot{w}}{\partial u}+\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial z}$ ------(13) で示されるから，式(3)と $\dot{\xi}=r_s\dot{\phi}$ を，式(13)に代入して整理すれば次式をえる。

$$\dot{g}=tG(K_s/t-r_s)\dot{f}+tGr_s\dot{\theta}-2t\tau G\dot{\lambda}+tG\dot{\gamma}_p \qquad \text{--------(14)}$$

よって，$\dot{T}=\int_A r_s\cdot\dot{g}\,du$ より，捩りモーメント$\dot{T}$が次の式のように決定される。

$$\dot{T}=G(J-I_c)\cdot\dot{f}+GI_c\dot{\theta}+\dot{T}_2^p \qquad \text{-------(15)}$$

（ただし $\dot{T}_2^p=-2\int_A r_s\,t\,\tau G\dot{\lambda}\,du+G\int_A r_s\,t\,\dot{\gamma}_p\,du$，また $J=\int_A r_s\cdot K_s\,du$，$I_c=\int_A t\cdot r_s^2\,du$）

式(11)と式(15)は当然同値であることから，未知関数fの決定方程式が次式のように与えられる。

$$EC_w\frac{d^2\dot{f}}{dz^2}-GJ\eta^2\dot{f}=-\eta^2\dot{T}+\dot{T}_1^p-\dot{T}_2^p(1-\eta^2) \qquad \text{---------(16)}$$

（ただし，$\eta^2=(I_c-J)/I_c$） また捩れ率$\dot{\theta}$は次式のように決定される

$$\dot{\theta}=\dot{T}/GI_c+\eta^2\dot{f}-\dot{T}_2^p/GI_c \qquad \text{--------(17)}$$

以上の誘導式(11),(16),(17)は，$T_1^p=0$，$T_2^p=0$とおけばBenscoterの結果[4]と一致する。

3．解析例　図-2に示すような，1BOX断面片持ばりの自由端に，捩りモーメントTをかける場合について計算し結果の一部を示す。断面は周方向172分割，長さ方向10分割とした。詳細は発表時に報告する。

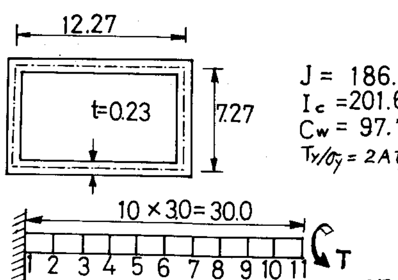

図-2

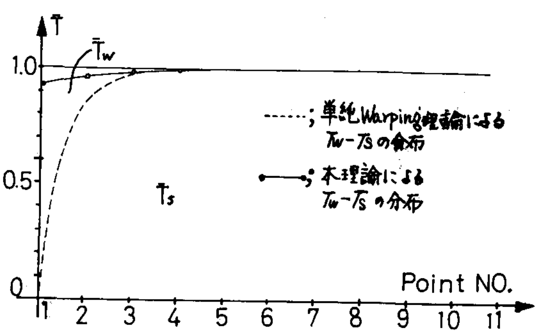

図-3

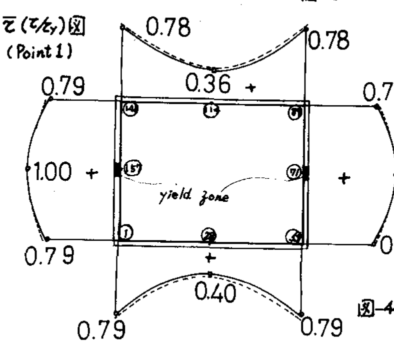

図-4

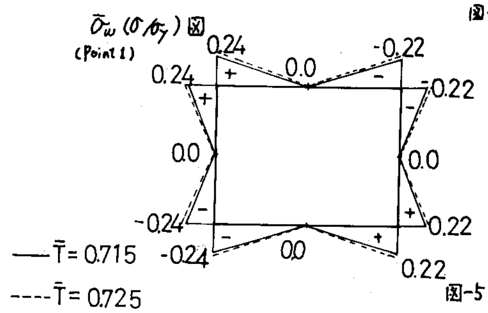

図-5

参考文献

1) komatu. Sakimoto ; Elasto-Plastic Behavior of Thin-Walled Steel Tubs Under Combind Forces. PROC. OF JSCE NO235. 1975

2) 太田，藤岡 ; 薄肉多室閉断面桁の弾塑性曲げ捩り理論（昭和48年度土木学会西部支部研究発表論文集）

3) 太田，吉村 ; 組み合せ負荷を受ける薄肉多室閉断面桁の弾塑性解析（九州大学 工学集報 第48巻 オ一号）

4) Benscoter ; "A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams" Journ. of Applied Mechanics. vol 21 No.1. p.25 1954

5) 太田，藤岡 ; 薄肉多室閉断面ばりの弾塑性曲げ解析（昭和49年 オ29回年次学術講演会講演集）