I-142　薄肉直線材の耐荷力解析における一手法

住友金属工業　正員　○後藤芳顕
新日本技研　正員　倉方慶夫
東京大学　正員　西野文雄

1. まえがき　薄肉直線材の耐荷力解析については数多くの研究が有るが、幾何学、および材料非線形を含むために問題を非常に困難にしており、いずれも満足なものではない。従ってこの両者を、いかに能率良く処理するかが問題である。ここでは材料非線形に対しては従来通りの i) 鋼材は完全弾塑性体とし、歪の硬化や反転などは考慮しない。 ii) 降伏に及ぼす剪断歪の影響は無視する。等の仮定を導入することとし、幾何学的非線形性について従来より厳密になるよう解析法について述べる。材料非線形を扱うには、長さ方向に降伏域が変化するため、たとえ等断面部材であっても、長さ方向に細分割し、その区間では降伏領域一定として、変断面弾性部材のように考えることが必要になる。この部材を長さ方向に細分割するということを、幾何学的非線形性の処理にも利用し、有限変位の基本式を誘導する。その際繁雑な幾何学的考察は避け、仮想仕事の式を用い算術演算で求める。このようにすれば基本式が自動的に求めることができる一方、近似上統一のとれたものを導くことも容易である。本報告では、簡単のために薄肉棒理論の、特別な場合である一軸棒理論を例にとって述べるが、その一般解への拡張も同じ手法によれば良い。

2. 基礎概念　三次元連続体の変形前の点を示す位置ベクトルを $\mathbb{r}$，変形後のそれを $\hat{\mathbb{r}}$，また変位ベクトルを $\mathbb{u}$ で表わすと次式が成立する。

$$d\hat{\mathbb{r}} = d\mathbb{r} + d\mathbb{u} \qquad (1)$$

一方 $|d\mathbb{r}|$ と同じ長さの任意ベクトル $d\mathbb{r}^*$ を考え $\mathbb{u}^*$ を Fig. 1 のように定めれば

$$d\hat{\mathbb{r}} = d\mathbb{r}^* + d\mathbb{u}^* \qquad (2)$$

なる関係式が成立する。

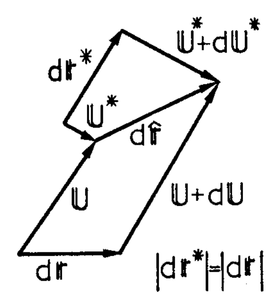

Fig. 1

右手系をなす直交直線座標 x_i を考え、それで変形前の物体内の点を記述し、変形後もその座標値で呼ぶことにする。x_i の座標軸正方向を向く単位ベクトルを $\mathbb{a}_i$ とする。これを用いて $d\mathbb{r}$, $\mathbb{u}$ を表わせば、

$$d\mathbb{r} = dx_i\,\mathbb{a}_i \quad (3) \qquad \mathbb{u} = u_i\,\mathbb{a}_i \quad (4)$$

これから $d\hat{\mathbb{r}}$ は次のようになる。

$$d\hat{\mathbb{r}} = (\mathbb{a}_i + u_{j,i}\,\mathbb{a}_j)\,dx_i \qquad (5)$$

$d\mathbb{r}^*$, $\mathbb{u}$ についても、(3)(4) と全く同じ状態が再現されるように

$$d\mathbb{r}^* = dx_i\,\mathbb{a}_i^* \qquad (6)$$

を満足する互いに直交する単位ベクトル $\mathbb{a}_i^*$ を選ぶことができる。これは $|d\mathbb{r}^*| = |d\mathbb{r}|$ としたことによる。$\mathbb{u}^*$ も $\mathbb{a}_i^*$ で展開し、式( )とともに(2)に代入すれば

$$d\hat{\mathbb{r}} = (\mathbb{a}_i^* + u_{j,i}^* \cdot \mathbb{a}_j^*)\,dx_i \qquad (7)$$

となり、式(5)と(7)との記述は一致する。つまり u_i^* についての扱いは u_i と同じである。この事実に注目する一方、幾何学的非線形性は $u_{j,i}^*$ に起因するから、$u_{j,i}^*$ を $d\mathbb{r}^*$ のとり方により無視できる量にすることを考える。

3. 一軸棒理論における解析

a) 変位成分 u_i^*　x_i の選び方は通常の一軸棒理論[1]にならうものとし、一軸棒理論で認められている仮定[1]の他に、微小歪の仮定 $e_{ij} \ll 1$ を導入する。これらの条件下での変位場、歪テンソル・変位関係は、1で述べたように u_i^* に関して u_i と同じように求めることができ[1]、次のようになる。

$$u_2^* = u_{02}^* - x_2(1-\cos\alpha^*) \qquad u_3^* = u_{03}^* - x_2 \sin\alpha^* \qquad (8)$$

$$e_{22}=0 \quad e_{23}=0,\quad e_{33} = u_{03}^{*\prime} + \frac{1}{2}(u_{03}^{*\prime 2} + u_{02}^{*\prime 2}) - x_2\alpha^{*\prime} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha^* = u_{02}^{*\prime},\quad \cos\alpha^* = 1+u_{03}^{*\prime},\quad \alpha^{*\prime} = (1+u_{03}^{*\prime})u_{02}^{*\prime\prime} - u_{02}^{*\prime} \\ u_{0i}^{*\prime} = du_{0i}/dx_3 \quad u_{0i}^* \text{ は } x_2=0 \text{ の点の変位} \end{array}\right\} (10)$$

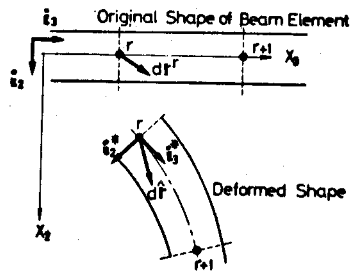

Fig. 2

部材中の r 点 (x_i^r) において $d\mathbf{i}^{*r}$ を $d\hat{\mathbf{i}}^r$ と同じ向きに重ねて選ぶと $\mathbf{i}_i^{*r}$ は一軸棒理論の平面保持の仮定より、次のように選べばよい。

$$\mathbf{i}_i^{*r} = (\delta_{ij} + u_{j,i}^r)/|\hat{\mathbf{i}}_i^r|\cdot\mathbf{i}_j \quad (11) \qquad |\hat{\mathbf{i}}_i^r| = (\delta_{ij}+u_{j,i}^r)\mathbf{i}_j \quad (12)$$

この幾何学的意味は Fig. 2 に示す。このとき式(11)を(7)に代入し式(6)を用いれば

$$(\delta_{ij}+u_{j,i}^*)(\delta_{jk}+u_{k,j}^r)/|\hat{\mathbf{i}}_j^r| = (\delta_{ij}+u_{k,i}) \qquad (13)$$

r点で $u_{j,i}^*$ について考えれば式(13)より

$$\delta_{ij} - (\delta_{ij}+u_{j,i}^*)/|\hat{\mathbf{i}}_j^r| = 0 \qquad (14)$$

となり、

$$i\neq j \text{ で } u_{j,i}^{*r}=0 \quad i=j \text{ で微小歪の仮定より } 1+u_{j,i}^r = |\hat{\mathbf{i}}_j^r| \approx 1 \qquad (15)$$

が成立する。r点 ($x_2=0$) の近傍では式(15)より $u_{0i}^{*\prime}$ を x_3 で展開すれば次のようになる。

$$u_{02}^{*\prime} = O(x_3-x_3^r),\quad 1+u_{03}^{*\prime} = 1+O(x_3-x_3^r) \qquad (16)$$

式(16)より、$|x_3-x_3^r|$ を他の項に比べ十分無視できる程度に細分割すれば式(9)より歪変位関係は

$$e_{33} \approx u_{03}^{*\prime} - x_2 u_{02}^{*\prime\prime} \qquad (17)$$

となり、いわゆる微小変位理論におけるものと一致する。以下 $|x_3-x_3^r|$ の分割は上記の程度に十分小さいものとする。ところで式(8)を(13)に代入し、$u_{0i}^{*\prime}$ と u_{0i} との関係式を求めると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} u_{02}^{*\prime} \\ 1+u_{03}^{*\prime} \end{Bmatrix} = [R^r]\begin{Bmatrix} u_{02}' \\ 1+u_{03} \end{Bmatrix} \qquad [R^r] = \begin{bmatrix} \cos\alpha^r, & -\sin\alpha^r \\ \sin\alpha^r, & \cos\alpha^r \end{bmatrix} \qquad (18)$$

$$\sin\alpha = u_{02}' \qquad \cos\alpha = 1+u_{03}'$$

b) 基本式　仮想仕事の式は部材を長さ方向に細分割するから、和の形で表わされる。

$$\delta\Pi = \delta V - \delta W_d - \delta W_p - \delta W_b = \sum_{r=1}^{n}(\delta V^r - \delta W_d^r) - \delta W_p - \delta W_b \qquad (19)$$

内部応力：$\delta V^r = \int_{x^r}^{x^{r+1}}\int_A \sigma_{33}\delta e_{33}\, dA\, dx_3$,　分布外力：$\delta W_d^r = \int_{x^r}^{x^{r+1}}\int_A (P_{2d}\delta u_2 + P_{3d}\delta u_3)\, dA\, dx_3$

節点集中外力：$\delta W_p = \bar{F}_2^r\delta u_2 + \bar{F}_3^r\delta u_3 + \bar{M}^r\delta\alpha$,　部材両端表面力：$\delta W_b = \left[n_z\int_A(P_{23}\delta u_2 + P_{33}\delta u_3)dA\right]_1^{n+1}$, $n_z = \begin{cases} -1 & 1 \\ 1 & n+1 \end{cases}$

細分割の条件より式(18)より近似化を行うと各変分量は、

$$\delta e_{33} = \delta u_{02}^{*\prime} - x_2\delta\alpha^{*\prime},\quad \delta u_2 = \delta u_{02}^*,\quad \delta u_3 = \delta u_{03}^* - x_2\delta u_{02}^{*\prime} \qquad (20)$$

となる。釣合式は $\mathbf{i}_2^{*r}$, $\mathbf{i}_3^{*r}$ 方向, 境界条件式、連続条件式は $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ 方向で考えるものとする。式(18)より δu_{0i} と δu_{0i}^* との関係式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta u_{02}^* \\ \delta u_{03}^* \end{Bmatrix} = [R^r]\begin{Bmatrix} \delta u_{02} \\ \delta u_{03} \end{Bmatrix} \qquad (21)$$

式(19)を計算するときに、式(21)を適宜用いれば、釣合式節点での連続条件式、境界条件式が求まる。

○釣合式

$$\begin{cases} (M' + m_{22}\sin\alpha^r + m_{23}\cos\alpha^r)' + P_{d2}\cos\alpha^r - P_{d3}\sin\alpha^r = 0 \\ N' + P_{d2}\sin\alpha^r + P_{d3}\cos\alpha^r = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

○両端での境界条件

力学的条件

$$n_z\begin{Bmatrix} \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{M}_{22}\sin\alpha^r + \bar{M}_{23}\cos\alpha^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R^r] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M' + m_{22}\sin\alpha^r + m_{23}\cos\alpha^r \\ N \\ M \end{Bmatrix} \qquad (23) \quad (r=1,\ n+1)$$

幾何学的条件　$u_{02}=C,\quad u_{03}=C,\quad \alpha=C$　(24)

・中間節点での連続条件

力学的条件

$$\begin{Bmatrix}\bar F_2^r\\ \bar F_3^r\\ \bar M^r\end{Bmatrix} = \left|\begin{bmatrix}[R^k] & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M'+m_{22}\sin\alpha^k+m_{23}\cos\alpha^k\\ N\\ M\end{Bmatrix}\right|_{+x_3^r,\ k=r}^{-x_3^r,\ k=r-1} \qquad (26)$$

幾何学的条件　$|u_{02}|_{+x_3^r}^{-x_3^r}=0 \qquad |u_{03}|_{+x_3^r}^{-x_3^r}=0 \qquad |\alpha|_{+x_3}^{-x_3^r}=0$　(27)

$N=\int_A\sigma_{33}dA \quad M=\int_A\sigma_{33}x_2dA,\quad \bar F_2=\int_A P_{23}dA,\quad \bar F_3=\int_A P_{33}dA,$

$\bar M_{22}=\int_A P_{23}x_2dA,\quad \bar M_{23}=\int_A P_{33}x_2dA,\quad m_{22}=\int_A P_{2d}x_{2d}dA,\quad m_{23}=\int_A P_{3d}x_2dA$

釣合式は線形式となっており、弾性部分ではフックの法則 $\sigma_{33}=E\epsilon_{33}$, と式(17)より線形微分方程式となり解くことができる。

c) 耐荷力解析　基本式とフックの法則より格間伝達式と格点伝達式を求め、還元法的手法による。解析法は、ある点で既知以外の力学および幾何学諸量をすべて仮定し、格点および格間伝達式を用いて境界条件の与えられている所まで伝達していき、その点で境界値と一致するまで仮定量を修正し繰り返す。これは境界値問題を初期値問題として解くことに相当する。耐荷力計算のとき相関曲線という形で求められるならば繰り返し計算は必ずしも必要ではない。Fig. 3 にその方法を示す。有限変位の数値上の精度チェックを Fig. 4 に示す。

4. あとがき　一軸棒理論では、その有限変位基本式は微小歪の条件下で $|x_3-x_3^r|\to 0$ とすれば、いわゆる微小変位の式となる。実際は $|x_3-x_3^r|$ をある程度小さくすれば、Fig. 4 より微小変位の式を用いても工学上十分な解を与え、また後座屈まで考慮にしたものになることがわかる。一般的な薄肉棒理論では微小歪の条件下で本手法を用いて $|x_3-x_3^r|\to 0$ としても基本式は全くの線形とはならず一部非線型項の残った式となる。これはそりによる効果であり、従来変形後で釣合いを考え剛体変位を除けば何でも微小変位の式で扱えるという考え方が必ずしも近似の統一上正しくないことを示すものである。

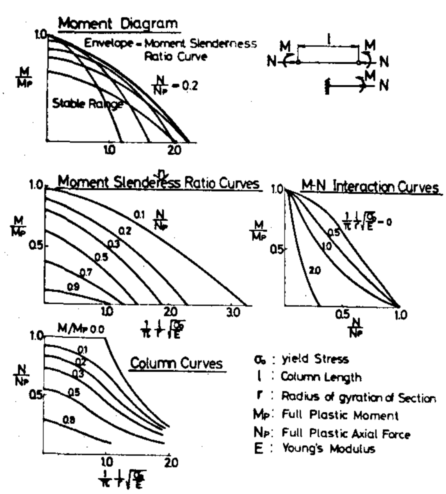

Fig. 3

参考文献 (1) 西野、倉方、後藤；一軸曲げと軸力を受ける軸の有限変位理論，土木学会論文報告集，NO. 237, pp 11-26, 1975-5

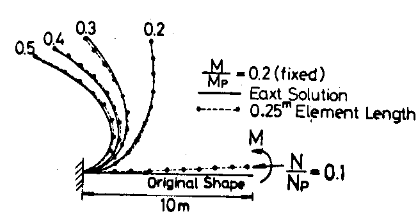

Fig. 4