

山梨大学工学部 正員 深沢泰晴
山梨大学大学院 学生員 〇太田貞次

1. はじめに

ティモシェンコばり理論の名で知られるせん断変形と回転慣性を考慮したはりの曲げ振動解析の手法を、薄肉開断面ばりの曲げねじれ振動問題の解析に拡張することを試みた。せん断変形の評価の方法としては、ここでは次の2つの方法を適用してみた。すなわち、

- (i) 2軸方向の曲げに伴うせん断ひずみおよび反り拘束に伴うせん断ひずみの各々に対して、横断面全体にわたるエネルギー的平均せん断ひずみを用いる方法。
 - (ii) 薄肉多角断面ばりの場合、曲げねじれ現象は個々の板帯にとっては近似的にその面内の曲げであるから、その曲げに伴うせん断ひずみに対して、各板帯ごとのエネルギー的平均せん断ひずみを用いる方法。
- (ii) は (i) に較べて精度が良いと思われるが、曲線形状の断面形の場合には適用できない欠点がある。本報告は上記の2つの理論に基づき、薄肉ばりの曲げねじれ振動特性、主としてその固有振動数に対するせん断変形の影響を調べたものであり、同時に両理論の比較を行なったものである。

2. 全横断面での平均せん断ひずみを用いた場合の基礎方程式²⁾

曲げおよび反り拘束に伴うせん断ひずみを、全横断面にわたってエネルギー的に平均化することによって、せん断補正係数を曲げおよび反り拘束せん断に対してそれぞれ次式で定義することができる；

$$\frac{1}{K_x} = \frac{F}{J_y^2} \int_F \frac{S_x^2}{t^3} dF, \quad \frac{1}{K_y} = \frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{S_y^2}{t^3} dF, \quad \frac{1}{K_w} = \frac{J_T}{C_w} \int_F \frac{S_w^2}{t^3} dF \quad \dots (1)$$

ここに、 $S_x = \int_0^s \chi t ds$, $S_y = \int_0^s \chi t ds$, $S_w = \int_0^s \omega t ds$

これを用いて、せん断変形を考慮した曲げねじれ振動の基礎方程式を次のように表わすことができる；

$$\left. \begin{aligned} K_x G F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) - \rho F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \psi_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) &= 0, & K_x G F \frac{\partial u}{\partial z} + E J_y \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} - K_x G F \psi_y - \rho J_y \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= 0 \\ K_y G F \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) - \rho F \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \chi_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) &= 0, & K_y G F \frac{\partial v}{\partial z} - E J_x \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - K_y G F \psi_x - \rho J_x \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= 0 \\ (1 + K_w) G J_T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - K_w G J_T \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \rho F \left(\chi_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \chi_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \chi_y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) &= 0, & K_w G J_T \frac{\partial \varphi}{\partial z} + E C_w \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - K_w G J_T \vartheta - \rho C_w \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ここに、 u, v, w ：せん断中心 S の x, y, z 軸方向の変位、 φ ：断面のねじり回転角 (図-1)、 ψ_x, ψ_y ：曲げせん断変形を考慮した x, y 軸まわりの断面の平均回転角、 ϑ ：反り拘束ねじりを考慮した断面のねじり率、 χ_x ：せん断中心 S に関する断面の極回転半径、 E ：ヤング率、 G ：せん断弾性係数。

3. 構成板帯ごとの平均せん断ひずみを用いた場合の基礎方程式²⁾

図-1のような薄肉多角断面形のはりの場合、はり全体のひずみエネルギー V 、および運動エネルギー K は、各構成板帯ごとのそれらを集合した次式の形で表わすことができる；

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{j=1}^n \left\{ E F_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial z} \right)^2 + E J_j \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} \right)^2 + G J_T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + G K_j F_j \left(\frac{\partial u}{\partial z} \cos \alpha_j + \frac{\partial v}{\partial z} \sin \alpha_j + I_j \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \psi_j \right)^2 \right\} dz \\ K &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left\{ F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + F \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + 2F \chi_y \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - 2F \chi_x \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + I_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n J_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 \right\} dz \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここに、 F_j ：板帯 j の断面積、 J_j ：板帯 j の断面の ψ_j 軸まわりの断面2次モーメント、 K_j ：板帯 j の断面の ψ_j 軸まわりの曲げのせん断補正係数、 I_j ：せん断中心 S から ψ_j 軸におした垂線の長さ、 J_T ：全断面の St. Venant の

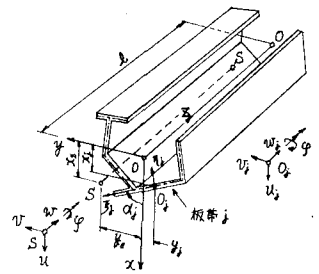


図-1 薄肉多角断面はりの一般図

ぬじり定数, I_s : セン断中心 S に関する全断面の極慣性モーメント。さらに, w_j : 板帯 j の断面の中立点 O_j のはり軸方向の変位成分, ψ_j : 板帯 j の断面のせん断変形を考慮した η_j 軸まわりの平均回転角。

なお, $\frac{\partial w_j}{\partial z}$ は, 各板帯の接合点におけるはり軸方向の垂直ひずみの連続の条件 (図-2 参照), なすびにはり軸方向の力のつりあい条件とによって, 次のように, ψ_j ($j=1, 2, \dots, n$) で表わすことができる;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_j}{\partial z} &= \frac{1}{F} \sum_{m=2}^n \sum_{i=2}^m F_m \left(a_{i-1} \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} + a_i' \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w_j}{\partial z} &= \frac{\partial w_j}{\partial z} - \sum_{i=2}^j \left(a_{i-1} \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} + a_i' \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right); \quad j=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

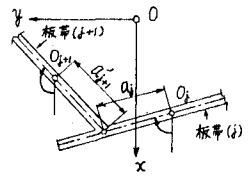


図-2 板帯 (j) と板帯 $(j+1)$ の接合部

以上より, はりの全ポテンシャルエネルギー $(V+K)$ を知れば, $\delta(V+K)=0$ から変分問題のオイラーの微分方程式として, セン断変形を考慮した曲げぬじり振動に対する基礎方程式が, u, v, φ, ψ_j ($j=1, 2, \dots, n$) に関する連立微分方程式として得られる。

4. 固有振動数に対するせん断変形の影響—数値計算結果

二軸対称断面として等フランジ I 断面, 一軸対称断面として円弧断面とチャンネル断面を選び, 前記の 2 種の基礎方程式に基づき, 曲げぬじり固有振動数に及ぼすせん断変形の影響を数値的に調べた。ここでは, はりの支持条件として両端単純支持の場合の計算結果を図-3 ~ 図-7 に示す。これらの図において, 縦軸はせん断変形を無視した場合の固有振動数 ω_0 に対するせん断変形を考慮した場合の各対応するモードの固有振動数 ω の比を表わしている。

等フランジ I 断面ばりの場合, 前記の 2 種の理論による差は殆んど認められなかった。図-3 に見られるように, フランジ幅およびウェブ高の増大とともにせん断変形の影響が顕著となる。

円弧断面ばりの場合は, (ii) の理論の適用ができないうので, (i) の理論のみの計算結果が, 第 1 および第 2 モードについて, それぞれ図-4 および図-5 に示される。中心角および $D/2$ の増加とともに, セン断変形を考慮すると固有振動数は著しく低下することがわかる。図-6 および図-7 に示されるチャンネル断面ばりの場合には, 両理論による差異が明瞭に現われており, 今後の検討課題としなければならぬ。第一次モードに比べて第二次モードの方がせん断変形の影響を大きく受ける傾向があることを付記しておく。

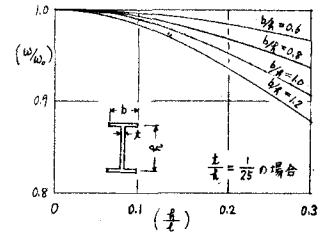


図-3 I 断面の曲げぬじり固有振動数 (第一次)

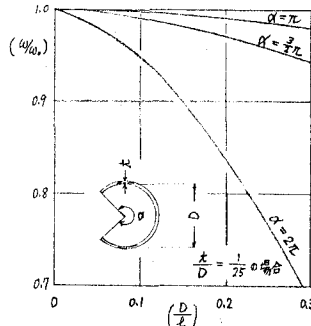


図-4 円弧断面の曲げぬじり固有振動数 (第一次)

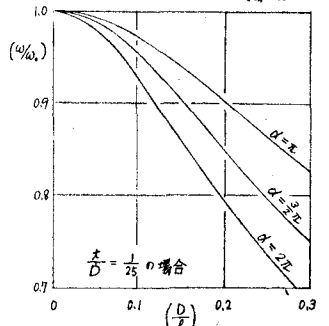


図-5 円弧断面の曲げぬじり固有振動数 (第二次)

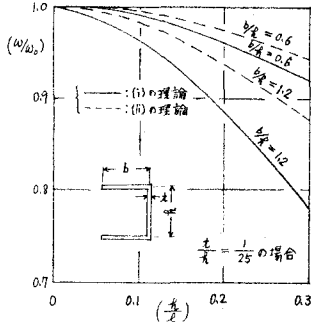


図-6 I 断面の曲げぬじり固有振動数 (第一次)

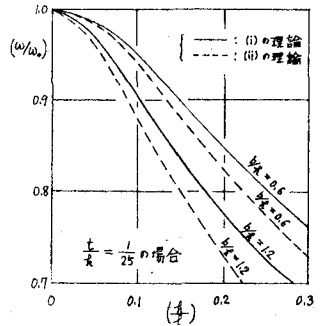


図-7 I 断面の曲げぬじり固有振動数 (第二次)

参考文献 1) 深沢: 橋梁と基礎, 昭50-7. 2) 深沢・太田: 山梨大学工学部研究報告, 昭49-12.
3) 深沢: 第28回土木学会講演概要集, 昭48-10. 4) 深沢・太田: 第29回土木学会講演概要集, 昭49-10.
5) Aggarwal, H.R. and E.T.Cranch: Journal of Applied Mechanics, June 1967.