I-140　曲げとねじりを受ける薄肉直線材の有限変位解析

佐藤鉄工　正員　○落合正利
新日本技研　正員　倉方慶夫
東京大学　正員　西野文雄

1. はじめに　薄肉直線棒部材の有限変位理論に基づく研究は、多くの研究者の注目を集めてきたが、さきに著者らも『軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材』と題して薄肉直線棒部材の、より一般的な有限変位理論に基づく支配方程式を仮想仕事の原理より求めて報告した。そこでも指摘しているように、幾何学的な考察からつり合い式を求めるとき、力の大きさ、向き、方向に十分な注意を払わなければならないのに対し、仮想仕事の原理に基づくと、変位場を仮定すれば、すべての支配方程式が数学的な演算のみで求まり、求められた支配方程式の精度はすべて変位場の仮定によって決まる。ここでは、さきの報告で得られた変位場をもとに有限要素法により剛性方程式を求め、数値計算をする。変位の高次項を含む非線型問題では変位ベクトルの係数である剛性マトリックスは唯一つに決まらず、対称でない形でも求まる。対称性を保ち、かつ基本式を増分形式に書きかえたときに係数が変化しない形で書き表わすために総和規約を用いて和の形で剛性方程式を表わす。

2. ひずみと変位の関係　薄肉断面の一例をFig. 1に示す。部材上の点を表わすのに2組の物体固定座標系を用い、その一つは任意点Cを原点とする（x, y, z）座標であり、基準状態（変形前）では、デカルト座標を構成する。他の一つは（s, n, z）座標であり、基準状態では直交曲線座標である。両座標系に共通なz座標を、部材軸に平行に選ぶ。両座標系ともに右手系の座標とする。実構造物への適用を考えるとそれ程大きな変化を扱うことはまれであることから、ここではさきの報告で得られた変位場をもとに変位の3次項までを考慮した変位場を次に示す。

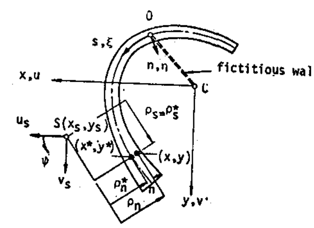

Fig. 1.

$$u = u_s - (y - y_s)\varphi - (x - x_s)\frac{\varphi^2}{2} + (y - y_s)\frac{\varphi^3}{6} \tag{1}$$

$$v = v_s + (x - x_s)\varphi - (y - y_s)\frac{\varphi^2}{2} - (x - x_s)\frac{\varphi^3}{6} \tag{2}$$

$$w = w_c - x u_s' - y v_s' - \omega\varphi' + (y u_s' - x v_s')\varphi + (x u_s' + y v_s')\frac{\varphi^2}{2} \tag{3}$$

$$\xi = l u_s + m v_s + \rho_s\varphi - \rho_n\frac{\varphi^2}{2} - \rho_s\frac{\varphi^3}{6} \tag{4}$$

$$\eta = -m u_s + l v_s + \rho_n\varphi + \rho_s\frac{\varphi^2}{2} - \rho_n\frac{\varphi^3}{6} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z = {} & w_c' + \frac{1}{2}(u_s'^2 + v_s'^2) - x u_s'' - y v_s'' - \omega\varphi'' \\ & + (y_s u_s' - x_s v_s')\varphi' + (y u_s'' - x v_s'')\varphi \\ & + \frac{1}{2}\{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2\} + (x_s u_s' + y_s v_s')\varphi\varphi' \\ & + (x u_s'' + y v_s'')\frac{\varphi^2}{2}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\gamma_{sz} = \frac{1}{2}\Theta\varphi' \tag{7}$$

ここに、

u, v, w；基準状態でのx, y, z方向への変位

ξ, η；基準状態でのs, n方向への変位

u_s, v_s, φ；任意点$S(x_s, y_s)$のx, y方向の変位および回転変位

l, m；$l = \cos(s, x)$，$m = \cos(s, y)$

ρ_s, ρ_n；$\rho_s = m(x - x_s) - l(y - y_s)$

$\rho_n = l(x - x_s) + m(y - y_s)$

Θ；$\Theta = \begin{cases} -2n & \text{（開区間）} \\ \dfrac{\oint \rho_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds}\dfrac{1}{t} - 2n & \text{（閉区間）} \end{cases}$

$(\ )'$，$(\ )^*$；$\dfrac{\partial(\ )}{\partial z}$，板厚中心線上の諸量

3. 有限要素法による基本式　部材に分布して作用する外力（体積力）と両端に外的に作用する表面力を受け空間でつり合っている直線材を考えると、仮想仕事の原理は次式で表わされる。

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_A \left[\sigma_z\delta\varepsilon_z + 2\tau_{sz}\delta\gamma_{sz}\right] dA\cdot dz = \int_{z_1}^{z_2}\int_A \left[P_{xd}\delta u + P_{yd}\delta v + P_{zd}\delta w\right] dA\cdot dz + \left[\int_A (\bar{\sigma}_z\delta w + \bar{\tau}_{sz}\delta\xi + \bar{\tau}_{nz}\delta\eta) dA\right]_{z_1}^{z_2} \tag{8}$$

ここに P_{xd}, P_{yd}, P_{zd} はそれぞれ基準状態での x, y, z 方向への単位体積あたりの分布外力であり、$\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{sz}, \bar{\tau}_{nz}$ は両端断面の基準状態での z, s, n 方向への表面力である。式(6),(7)にあらわれる全ての変位成分を含む無次元ベクトル $\mathbf{d}$ を定義する。$\mathbf{d} = [u_s' \ \ l_0 u_s'' \ \ v_s' \ \ l_0 v_s'' \ \ \varphi \ \ l_0\varphi' \ \ l_0\varphi'' \ \ w_c']$ l_0 は無次元化するために導入した基準長さである。有限要素の長さを l とすると $l = z_2 - z_1$。要素長が単位の値で表わせるよう、次式で定義される補助座標 ξ を導入する。$\xi = (z - z_1)/l$ ξ に関する微分を $(\dot{\ })$ で表わすと、ベクトル $\mathbf{d}$ は $\mathbf{d} = [\alpha\dot{u}_s/l_0 \ \ \alpha^2\ddot{u}_s/l_0 \ \ \alpha\dot{v}_s/l_0 \ \ \alpha^2\ddot{v}_s/l_0 \ \ \varphi \ \ \alpha\dot{\varphi} \ \ \alpha^2\ddot{\varphi} \ \ \alpha\dot{w}_c/l_0]$ と表わされる。ここに $\alpha = l_0/l$。式(6),(7)をベクトル $\mathbf{d}$ を使って書き表わすと次式となる。

$$\varepsilon_x = E_i d_i + E_{ij} d_i d_j + E_{ijk} d_i d_j d_k, \quad \gamma_{sz} = E_i^{\gamma} d_i \qquad (i, j, k = 1, \cdots 8) \qquad (9)$$

係数 E は一般には唯一つに決まらないが、指標の全てについて対称となる条件を設けると唯一つに決まる。変位の3次項まで考慮してベクトル $\mathbf{d}$ および式(9)を代入すると、式(8)の仮想仕事の原理は El_0^3 で無次元化した型で、次のように書ける。

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^1 (\overline{W}_{ij} d_j + \overline{W}_{ijk} d_j d_k + \overline{W}_{ijkl} d_j d_k d_l)\,\delta d_i\, d\xi$$
$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 (\overline{W}_i^{(0)} + \overline{W}_{ij}^{(0)} d_j^{(0)} + \overline{W}_{ijk}^{(0)} d_j^{(0)} d_k^{(0)})\,\delta d_i^{(0)}\, d\xi + (F_i + F_{ij} q_j + F_{ijk} q_j q_k)\,\delta q_i \qquad (10)$$

ここに、$\mathbf{d}^{(0)} = [u_s/l_0 \ \ \alpha\dot{u}_s/l_0 \ \ v_s/l_0 \ \ \alpha\dot{v}_s/l_0 \ \ \varphi \ \ \alpha\dot{\varphi} \ \ w_c/l_0]$, $q = [q^u \ \ q^v \ \ q^{\varphi} \ \ q^w]$, $q^u = [u_{s1}/l_0 \ \ u_{s2}/l_0 \ \ \alpha\dot{u}_{s1}/l_0 \ \ \alpha\dot{u}_{s2}/l_0]$, $q^v = [v_{s1}/l_0 \ \ v_{s2}/l_0 \ \ \alpha\dot{v}_{s1}/l_0 \ \ \alpha\dot{v}_{s2}/l_0]$, $q^{\varphi} = [\varphi_1 \ \ \varphi_2 \ \ \alpha\dot{\varphi}_1 \ \ \alpha\dot{\varphi}_2]$, $q^w = [w_{c1}/l_0 \ \ w_{c2}/l_0 \ \ \dot{w}_{c1}/l_0 \ \ \dot{w}_{c2}/l_0]$、変位に付した下添字 1, 2 はそれらの変位がそれぞれ有限要素の両端 z_1, z_2 での量であることを示す。定数を成分とする $\overline{W}, \overline{W}^{(0)}, F$ はそれぞれ内部応力、要素内部に分布して作用する外力、要素両端に作用する力が仮想変位に伴ってする仕事に関する項の係数を示す。これらの項も一般には唯一つに決まらないが、指標の全てについて対称となる条件を設けると唯一つに決まる。有限要素の内部での変位を要素両端での変位を未定係数とする有理多項式で近似し、式(10)の仮想仕事の原理が成り立つ条件から外力と要素両端での変位との関係を表わす剛性方程式を求める。u_s, v_s, φ, w_c を両端での条件を満足するよう次のように近似する。$u_s/l_0 = f_i q_i^u$ $v_s/l_0 = f_i q_i^v$ $\varphi = f_i q_i^{\varphi}$ $w_c/l_0 = f_i q_i^w$ ここに $f = [(1-3\xi^2+2\xi^3) \ \ (3\xi^2-2\xi^3) \ \ (\xi-2\xi^2+\xi^3)/\alpha \ \ (\xi^3-\xi^2)/\alpha]$ ベクトル $\mathbf{d}, \mathbf{d}^{(0)}$ をベクトル q, f で表わすと、$d_i = D_{ij} q_j$, $d_i^{(0)} = D_{ij}^{(0)} q_j$ となり、ここに $D_{ij}, D_{ij}^{(0)}$ は ξ に関する多項式を要素とするマトリックスである。これらを式(10)の仮想仕事の原理に代入し、任意の仮想変位に対して成立するための必要十分条件として有限要素法による基本式、すなわち一要素についての剛性方程式が次のように求まる。

$$F_i + F_{ij} q_j + F_{ijk} q_j q_k = (K_{ij} q_j + K_{ijk} q_j q_k + K_{ijkl} q_j q_k q_l) - (F_i^{(0)} + F_{ij}^{(0)} q_j + F_{ijk}^{(0)} q_j q_k) \qquad (11)$$

ここに K および $F^{(0)}$ は次式で表わされる定数である。

$$K_{ij} = \overline{W}_{ab}/\alpha \int_0^1 D_{ai} D_{bj}\, d\xi \qquad K_{ijk} = \overline{W}_{abc}/\alpha \int_0^1 D_{ai} D_{bj} D_{ck}\, d\xi$$
$$K_{ijkl} = \overline{W}_{abcd}/\alpha \int_0^1 D_{ai} D_{bj} D_{ck} D_{dl}\, d\xi \qquad F_i^{(0)} = \overline{W}_a^{(0)}/\alpha \int_0^1 D_{ai}^{(0)}\, d\xi$$
$$F_{ij}^{(0)} = \overline{W}_{ab}^{(0)}/\alpha \int_0^1 D_{ai}^{(0)} D_{bj}^{(0)}\, d\xi \qquad F_{ijk}^{(0)} = \overline{W}_{abc}^{(0)}/\alpha \int_0^1 D_{ai}^{(0)} D_{bj}^{(0)} D_{ck}^{(0)}\, d\xi$$

$\overline{W}$ および $\overline{W}^{(0)}$ は全ての指標について対称であることから K および $F^{(0)}$ も全ての指標について対称となる。全ての節点での力に関する条件および変位に関する条件を用いて構造全体に対する剛性方程式が各要素の剛性方程式を重ね合わせた形で求まる。係数 $F, F^{(0)}, K$ が全ての指標について対称であることを利用すると荷重増分と変位増分の関係も容易に求まる。

参考文献 1) 西野, 倉方, 長谷川, 奥村;「軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材」
土木学会論文集 No. 225 1974-5