

秋田大学 正員 薄木 征三
秋田大学 正員 移 隆 知 徳

1. まえかき 薄肉断面部材の有限ひずみ理論に関する研究は、主として座屈問題に関連して発展してきたが、座屈支配方程式の精度は棒理論における仮定において定まる変位場の精度に全面的に依存するところが明らかにさ出ている。例えば、多数軸回りに沿った両端にゆがみ \$e-x\$ を作用させた場合は横倒し座屈は生じないことは一般に認められているが、これは軸方向ひずみを変位(部材軸線の)の1次まで考慮しただけの理論的に説明されることも指摘されている。以上は、直線部材の場合であるが、ここでは直線部材に対するのと同じ仮定のもとに、曲率一定の曲線材に対するひずみ-変位関係を基礎に、変位場の決定を試みるものである。

2. ひずみ-変位関係 図-1の如くに座標系を置く。図-2で \$s, m, z\$ 軸方向の変位を \$w\$ とし、\$x, y\$ 軸方向の変位を \$u, v\$ とする。薄肉 \$z\$ 軸のひずみ-変位関係は²⁾

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= \frac{1}{1+n/R_1} \left(\frac{\partial s}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+n/R_1)^2} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{s}{R_1} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m + \frac{\eta}{R_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+n/R_2)^2} \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m + \frac{\eta}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m + \frac{\eta}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{R_2} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{\theta s} &= \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{s\theta} &= \frac{1}{1+n/R_1} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m \right) + \frac{1}{(1+n/R_1)(1+n/R_2)} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m \right) + \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m + \frac{\eta}{R_2} \right) - \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{s}{R_1} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m \right) \right] \\ \gamma_{s\theta} &= \frac{\partial s}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{s}{R_1} \right) + \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{\partial s}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1} \right) \frac{\partial s}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_1} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{s}{R_1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \delta_{\theta s} &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m \right) + \frac{1}{1+n/R_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m + \frac{\eta}{R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{s}{\rho} m \right) \frac{\partial s}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{s}{R_1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{aligned} \quad \dots (1.a-f)$$

(1.a-f)で、下線部の項は \$z\$ 軸方向の変位に起因する直ひずみとせん断ひずみ、あるいは \$z\$ 軸自身の積であり、微小であるとして無視する。また \$l, m\$ は方向余弦であり、 $l = \cos(s, x) = \sin \theta, m = \cos(s, y) = -\cos \theta$ である。 u, v と \$s, \eta\$ との関係は

$$s = m v + l u, \quad \eta = m u - l v \quad \dots (2)$$

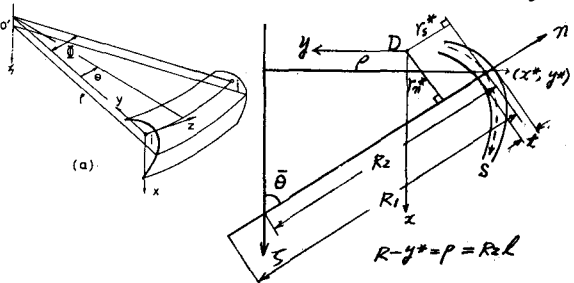
である。任意点 \$D\$ の \$x, y, z\$ 方向の変位を \$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\$、\$D\$ 点のまわりの曲率中心を \$O\$ とすると、

$$\begin{cases} u = \bar{u} - y \sin \varphi - x (1 - \cos \varphi) \\ v = \bar{v} + x \sin \varphi - y (1 - \cos \varphi) \end{cases} \quad (3)$$

で \$s\$ と \$z\$ 軸の \$u, v\$ と (2) に代入し、さらに (1.a), (1.c), (1.e) に代入すると

$$\epsilon_{ss} = \epsilon_{\theta\theta} = \delta_{s\theta} = 0 \quad \dots (4)$$

となる。すなわち (3) は横断面ひずみの仮定を満たす。次に (3) を (1.f) に代入すると、未知数は \$s\$ と \$\gamma_{\theta s}\$ を得るが、\$z\$ 軸は薄肉であることから \$\gamma_{\theta s} = 0\$ と仮定すると、



\$W\$ を用いる次の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta s} &= \frac{\partial w}{\partial m} + \frac{m \sin \varphi - l \cos \varphi}{1+n/R_2} \frac{w}{\rho} \\ &+ \frac{R}{\rho(1+n/R_2)} \{ (m \bar{v} + l \bar{u}) \sin \varphi + (m \bar{u} - l \bar{v}) \cos \varphi + l m \varphi' \} = 0 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

\$\Rightarrow z\$ 軸は \$R\$ に関する微分を意味し、\$R\$ は図-2に示す。

$$\begin{aligned} m \sin \varphi - l \cos \varphi &= A \\ (m \bar{v} + l \bar{u}) \sin \varphi + (m \bar{u} - l \bar{v}) \cos \varphi + l m \varphi' &= B \end{aligned}$$

とすると、(5) の解は次のようになる。

$$w = (w^* + \frac{RB}{A})(1 + \frac{r}{R_1}) \frac{R^2 A}{\rho} - \frac{RB}{A} \dots (6)$$

w^* は $m=0$, すなわち薄肉肉中心線での w の値である。 $m/R_1 \ll 1$ とすると (6) は

$$w = w^*(1 - \frac{m}{\rho} A) - \frac{R}{\rho} B \cdot m \dots (7)$$

すなわち、より w の肉厚方向 m の変化は直線的であると思わせる。次は w^* を求めることである。

よってこの微分要素の θ 方向の釣り合い式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \int_{-r/2}^{r/2} \tau_{s\theta} dm \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \int_{-r/2}^{r/2} \tau_{s\theta} dm + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho \int_{-r/2}^{r/2} \sigma_{\theta\theta} dm \right) + p_\theta = 0 \dots (8)$$

(8) は変位が小さいと (1) と (3) の線形理論での釣合式である。 p_θ は薄肉中央面に作用する θ 方向の荷重。 $\tau_{s\theta} = \tau_s$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_\theta$, $\delta_{s\theta} = \delta_s$ とおくと、(8) は次のように変形される。

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial s} (\rho^2 \tau_s^* r) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \sigma_\theta^* r) + p_\theta = 0 \dots (9)$$

ただし、 τ_s は肉厚方向に直線的に変化すると仮定し (後述)、 τ_s^* は薄肉中央 ($m=0$) での τ_s の値である。直応力 σ_θ と外力 p_θ とつり合い状態にあるせん断応力にはせん断歪は小さく無視できるとすると (9) より

$$\rho^2 \tau_s^* r = q = \text{一定} \dots (10)$$

(7) と (10) に代入し、 $m=0$ とおき、 $\tau_s^* = G \delta_s^*$ の関係を用いると次式を得る。

$$\frac{\partial w^*}{\partial s} + (m \cos \varphi + l \sin \varphi) \frac{w^*}{\rho} + \frac{R}{\rho} \{ (m \bar{v}' + l \bar{u}') \cos \varphi + (l \bar{v}' - m \bar{u}') \sin \varphi + \nu_s^* \varphi' \} - \frac{q}{G \rho^2 r} = 0, \dots (11)$$

ν_s^* は図-2参照。また (11) の標準形は

$$\frac{\partial m}{\partial s} = \frac{l}{R_1}, \quad \frac{\partial l}{\partial s} = -\frac{m}{R_1} \dots (12)$$

の関係式を用いると、よって w^* を、D点の z 方向の剛体変位 \bar{w} と ν_s^* による w_0^* の和と考えると、 w_0^*/ρ は高次の微少量と考えられる。

よって (11) の第1項と第2項の和は

$$\frac{\partial w^*}{\partial s} + (m \cos \varphi + l \sin \varphi) \frac{w^*}{\rho} \approx \frac{\partial w_0^*}{\partial s} + m \frac{w_0^*}{\rho} + (m \cos \varphi + l \sin \varphi) \frac{\bar{w}}{\rho} = \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w_0^*}{\rho} \right) + (m \cos \varphi + l \sin \varphi) \frac{\bar{w}}{\rho} \dots (13)$$

よって

$$m = \frac{\partial w_0^*}{\partial s} = \frac{\rho^2}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w_0^*}{\rho} \right)$$

(14)

$$l = \frac{\partial w_0^*}{\partial s} = \frac{\rho^2}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w_0^*}{\rho} \right) - \frac{\nu_s^*}{R}$$

の関係式を用いると、(11) は次のように変形される。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w_0^*}{\rho} \right) + \{ (\bar{v}' + \frac{\bar{w}}{R}) \cos \varphi - \bar{u}' \sin \varphi \} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w_0^*}{\rho} \right) + \{ \bar{u}' \cos \varphi + (\bar{v}' + \frac{\bar{w}}{R}) \sin \varphi \} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w_0^*}{\rho} \right) + \frac{R \nu_s^*}{\rho^2} \{ \varphi' - \frac{\bar{u}'}{R} \cos \varphi - \frac{1}{R} (\bar{v}' + \frac{\bar{w}}{R}) \sin \varphi \} - \frac{q}{G \rho^2 r} = 0 \dots (15)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= (\bar{v}' + \frac{\bar{w}}{R}) \cos \varphi - \bar{u}' \sin \varphi \\ \phi_y &= \bar{u}' \cos \varphi + (\bar{v}' + \frac{\bar{w}}{R}) \sin \varphi \\ \psi_z &= \varphi' - \frac{\bar{u}'}{R} \cos \varphi - \frac{1}{R} (\bar{v}' + \frac{\bar{w}}{R}) \sin \varphi \end{aligned} \right\} (16)$$

とおいて、(15) を s について積分すると

$$\frac{w_0^*}{\rho} - \frac{w_0^*}{\rho_0} = -\phi_x \left(\frac{y^*}{\rho} - \frac{y_0^*}{\rho_0} \right) - \phi_y \left(\frac{x^*}{\rho} - \frac{x_0^*}{\rho_0} \right) - \int_0^s \frac{R \nu_s^*}{\rho^2} ds \cdot \psi_z + q \int_0^s \frac{ds}{G \rho^2 r} \dots (17)$$

よって ρ_0, x_0^*, y_0^* は ρ, x, y の $s=0$ での値である。 w_0^* は $s=0$ での w_0^* の値である。肉厚 r は断面では

$$\phi \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w_0^*}{\rho} \right) ds = 0 \dots (18)$$

であるから、(17) と (18) より

$$-\int \frac{R \nu_s^*}{\rho^2} ds \cdot \psi_z + q \int \frac{ds}{G \rho^2 r} = 0 \dots (19)$$

$$\therefore q = \frac{\int \frac{R \nu_s^*}{\rho^2} ds}{\int \frac{ds}{G \rho^2 r}} \cdot \psi_z \equiv \tilde{q} \cdot \psi_z \dots (20)$$

もちろん剛性断面では、自由端での力学的条件より (10) の $\tau_s^* = 0$ であるから $q = 0$ である。

(20) を (17) に代入すると

$$\frac{w_0^*}{\rho} = -\frac{y^*}{\rho} \phi_x - \frac{x^*}{\rho} \phi_y - \left(\int_0^s \frac{R \nu_s^*}{\rho^2} ds - \tilde{q} \int_0^s \frac{ds}{G \rho^2 r} \right) \psi_z + \frac{C_0^*}{R} \dots (21)$$

よって

$$\frac{C_0^*}{R} = \frac{w_0^*}{\rho_0} + \frac{y_0^*}{\rho_0} \phi_x + \frac{x_0^*}{\rho_0} \phi_y \dots (22)$$

である。 C_0^* は未知であるが断面内では定数

である。 C_0^* を除いて w^* は $w^* = w_0^* + \bar{w}$ により確定した。 $w^* = w_0^* + \bar{w}$ を (7) に代入し、前と同様に w_0^*/ρ は高次の微少量であるとして、よって掛かる $\cos \varphi, \sin \varphi$ を

それと \$1, 0\$ とおくと (7) は

$$W = \bar{W} (1 - \frac{\alpha}{\rho} A) + W_0^* (1 + \frac{\rho}{\rho} m) - \frac{R}{\rho} B n$$

$$= \bar{W} - y \phi_x - x \phi_y - \left\{ \rho \left(\int_0^S \frac{R R_1^*}{\rho^2} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{g} \left(\int_0^S \frac{d\theta}{G \rho^2 \pi} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{R_2} \right) + \frac{R}{\rho} l m + \frac{\rho}{R} C_0^* \right\} \cdot \gamma_2 + \frac{\rho}{R} C_0^* \dots (23)$$

(23) 右辺の第 1 項は \$z\$ 軸方向の剛体変位, 第 2, 3 項は, \$x, y\$ 軸回りの回転に対する軸方向変位を表わすことは幾何学的に説明される. 定数 \$C_0^*\$ は, \$z\$ 軸方向の条件より決定される. 右辺の (23) の第 4 項以下を \$W_0\$ と表わすと

$$\int_0^S \int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{R}{\rho} W_0 d\theta d\phi = 0 \quad (24)$$

\$S\$ は, 薄肉中心線の全長である. 閉曲面では 1 周積分である. \$C_0^*\$ は次のように求まる

$$\frac{C_0^*}{R} = \frac{\int_0^S \left(\int_0^S \frac{R R_1^*}{\rho^2} d\theta - \tilde{g} \int_0^S \frac{d\theta}{G \rho^2 \pi} \right) x d\theta}{\int_0^S x d\theta} \cdot \gamma_2 \\ = -\frac{W_0}{R} \cdot \gamma_2 \dots (25)$$

(25) を (23) に代入すると \$W\$ は最終的に

$$W = \bar{W} - y \phi_x - x \phi_y - \left\{ \rho \left(\int_0^S \frac{R R_1^*}{\rho^2} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{g} \int_0^S \frac{d\theta}{G \rho^2 \pi} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{R_2} \right) + \frac{R}{\rho} l m + \frac{\rho}{R} W_0 \right\} \cdot \gamma_2 \quad (26)$$

と決定される.

(1. d) (7) に代入し, \$W^* = W_0^* + \bar{W}\$ とし, 前と同様の仮定を用い, \$n\$ の 2 次以上の項を無視すると

$$\delta_s = \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{W_0^*}{\rho} \right) \left(1 + \frac{2\alpha}{\rho} l \right) + \left(1 + \frac{2\alpha}{\rho} l \right) (m \cos \varphi + l \sin \varphi) \frac{W_0^*}{\rho} \\ - \frac{2\alpha}{\rho} \sin \varphi \cdot \frac{W_0^*}{\rho} \\ + \frac{R}{\rho} \{ (m \bar{v}' + l \bar{u}') \cos \varphi + (l \bar{v}' - m \bar{u}') \sin \varphi + \gamma_2^* \varphi' \\ + 2m \varphi \} - \frac{R}{\rho} \frac{2\alpha m l}{\rho} \{ (m \bar{v}' + l \bar{u}') \sin \varphi + \\ (m \bar{u}' - l \bar{v}') \cos \varphi + l m \varphi' \} \quad (27)$$

(11) と (13) より

$$\rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{W_0^*}{\rho} \right) = -\frac{R}{\rho} \phi_x m - \frac{R}{\rho} \phi_y l - \frac{R}{\rho} \gamma_2^* \varphi' + \frac{g}{G \rho^2 \pi} \dots (28)$$

(28) を (27) に代入して

$$\delta_s = \frac{R^2}{\rho^2} 2m \gamma_2 + \left(1 + \frac{2\alpha}{R_2} \right) \frac{\tilde{g}}{G \rho^2 \pi} \gamma_2 \quad (29)$$

より 2 断面では \$\tilde{g} = 0\$ である.

次に 7 条件 (9) を満たすように \$T_s^*\$ を修正する. (2), (3), (26) を (1. b) に代入すると, \$\sigma_{\theta\theta} = E \epsilon_{\theta\theta}\$ となる \$z\$ 軸方向の応力 \$\sigma_{\theta\theta}\$ を求める. これは (9) に代入して \$S_0\$ 上で積分すると

$$T_s^* x = \frac{g_0}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \int_0^S \rho^2 p_2 d\theta + \frac{g_0}{\rho^2} \dots (30)$$

\$\Rightarrow z\$ 軸方向の \$g_0\$ は不定積分の断面では \$g_0 = 0\$ である

$$\frac{g_0}{\rho^2} = \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \{ \epsilon_2' - \gamma_2 \epsilon_0' - \gamma_0 \epsilon_0' - \gamma_0 \epsilon_1' + \gamma_1 \epsilon_1' + \gamma_2 \epsilon_2' \\ + \gamma_3 \epsilon_3' + \gamma_4 \epsilon_4' + \gamma_5 \epsilon_5' + \gamma_6 \epsilon_6' + \gamma_7 \epsilon_7' \} \quad (31)$$

$$\epsilon_2' = \bar{w}' - \bar{v}/R, \epsilon_0 = \phi_x' - (1 - \cos \varphi)/R + (R/\rho) \{ \bar{u}' \cos \varphi + (\bar{v}' + \bar{w}'/R) (\phi_x/R + \sin \varphi) \}, \epsilon_0 = \phi_y' + \sin \varphi/R + (R/\rho) \{ \bar{u}' \times \sin \varphi + (\bar{v}' + \bar{w}'/R) (\phi_y/R - \cos \varphi) \}, \epsilon_1 = \gamma_2 + (R/\rho) (\bar{v}' + \bar{w}'/R) (\gamma_2/R), \epsilon_1 = (R/\rho) \{ \bar{u}'^2 + (\bar{v}' + \bar{w}'/R)^2 \} / 2, \epsilon_2 = \{ (\cos \varphi)^2 + (\phi_x/R + \sin \varphi)^2 \} / 2, \epsilon_3 = \{ \sin \varphi \cos \varphi \} + (\phi_y/R - \cos \varphi) (\phi_x/R + \sin \varphi), \epsilon_4 = (\phi_x/R + \sin \varphi)^2 / 2, \epsilon_5 = (\phi_y/R - \cos \varphi)^2 / 2, \epsilon_6 = (\gamma_2/R)^2 / 2, \epsilon_7 = (\gamma_2/R)^2 / 2 \quad (32)$$

'は \$R\$ による微分, かつ

$$f = \int_0^S x d\theta, g_x = \int_0^S y^2 d\theta, g_y = \int_0^S x^2 d\theta, g_w = \int_0^S w^2 d\theta, \\ f_0 = \int_0^S x d\theta, h_y = \int_0^S \int_{\pi/2}^{\pi/2} x^2 d\theta d\phi, h_x = \int_0^S \int_{\pi/2}^{\pi/2} y^2 d\theta d\phi, \\ h_{xy} = \int_0^S \int_{\pi/2}^{\pi/2} xy d\theta d\phi, p_y = \int_0^S \int_{\pi/2}^{\pi/2} w x d\theta d\phi, p_x = \int_0^S \int_{\pi/2}^{\pi/2} w y d\theta d\phi, p_w = \int_0^S \int_{\pi/2}^{\pi/2} w^2 d\theta d\phi \quad (33)$$

である. (30) の両辺を \$G \rho\$ で除くと \$T_s^*\$ となる.

以下 (11) ~ (20) と全く同様に計算を行って \$T_s\$ を求める. その結果

$$T_s = \frac{\phi \frac{R R_1^*}{\rho^2} d\theta}{\phi \frac{R_1^*}{\rho^2 \pi}} \gamma_2 - \frac{\phi \frac{g_0^*}{\rho^2}}{\phi \frac{g_0}{\rho^2 \pi}} = \tilde{g} \gamma_2 - g_0$$

$$T_s^* = g_0 - \int_0^S \rho^2 p_2 d\theta \dots (34)$$

以下 (21) ~ (29) と同じ計算を行って \$T_s\$ を求めると

$$\delta_s = \left\{ \frac{R^2}{\rho^2} 2m + \left(1 + \frac{2\alpha}{R_2} \right) \frac{\tilde{g}}{G \rho^2 \pi} \right\} \gamma_2 \\ + \left(1 + \frac{2\alpha}{R_2} \right) \left(\frac{g_0^*}{\rho^2 \pi} - \frac{g_0}{\rho^2 \pi} \right) \dots (35)$$

最終的に \$T_s\$ は \$T_s = G T_s\$ と表わされる.

- 1) 西野・高野他 "軸力と曲げ応力" (中心) を含む薄肉円筒の部, 環空全論文報告集, 225号, 1973, 5月
- 2) Novozhilov, Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, 1953.