

新日本技研(株) 正員 ○倉方慶夫
 東京大学工学部 正員 面野文雄

1. まえがき 薄肉枝の横座屈の基本式に関し多くの報告があるが、変位場、応力場ともに詳しく検討したものは少ない。その多くは座屈前の変位、変形の影響は微小として無視している。それらの影響を考慮したものもいくつかあるが、それらはいずれも直線枝に関するものであり、外力条件が限られていたり、数値上は十分な精度をもつと思えるが必ずしも全てを考慮したものではなく、厳密なものに対し何が無視されているか不明である。横座屈現象は理想の部材に対し理論上で考えられるものであるから、現実には多くの不整を有する部材への応用を考えると理論上の厳密性を追求することにそれほど意味は無いかもしれないが、厳密なものに対しどのような量が無視されているかを認識しておくことは無駄ではないであろう。ここでは変位前のある平面内で曲がっている薄肉開断面曲線枝を対象とし横座屈問題の変位場と応力場について詳しく検討したのでその概説を行う。

(仮定) (i) 開断面薄肉曲線枝であり断面は軸方向に一定である。(ii) 断面の図心軸は変位前のある平面上にあり、 Z 軸は図心軸に平行にとる。(Fig. 1) (iii) 断面々内において板厚中心線の伸び、板厚方向線素の伸び、およびせん断変形は無視でき、変形後も板厚中心線の曲率は変形前のそれと同じである。(iv) 板厚中心面々内でのせん断変形は無視できる。(v) 板厚中心面に垂直で Z 軸に平行な面内でのせん断変形は無視できる。(vi) 座屈前の状態では部材は yz 平面内でのみ変位し変形している一軸曲げの状態にある。(vii) そのための断面は yz 軸に関して対称であるとす。

仮定(iii)~(vi)は棒理論で古くから認められている一般的な仮定であり、棒理論としての問題の一次元化を図るための仮定である。仮定(iii)は一般に断面は変形しないと表現されている。仮定(iv)(v)はそれぞれベルヌーイ・オイラーの仮定とキルヒホッフ・ラブの仮定に相当する。仮定(i)の薄肉の条件は、 Z 軸の曲率を K_0 、断面上での板厚中心線の曲率を K 、板厚を $2t$ 、断面寸法を D とし、 $r_0 = 1/K_0$ 、 $r = r_0 + y$ とするとき

$$1 \gg |Kz|, \quad 1 \gg (t/D)^2, \quad 1 \gg |z/r| \quad (2)$$

座標 x, y はそれぞれ変位前において Z 軸の従法線と主法線であり、座標 S, n は断面上での板厚中心線とその法線である。座標 $(x, y, z), (S, n, z)$ はそれぞれ右手系座標であり、埋め込み座標とする。 x, y 座標の原点 O は板厚中心線上にとる。突断面の板厚中心線上にとると都合の悪い場合はFig. 2に示すように板厚 $t=0$ の仮想的薄肉要素で点 O と点 P の間を結べば点 O は常に板厚中心線上の点として定義できる。座標 (x, y, z) の基底ベクトルの Z 軸上の値を変位前、変位後

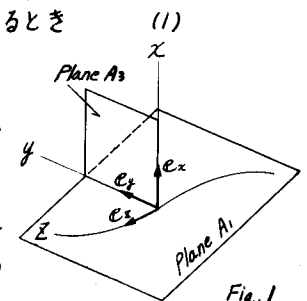


Fig. 1

それぞれ $(e_x, e_y, e_z), (\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ とすると、点 O を板厚中心線にとったので仮定(iv), (v)から $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ は互に直交する。また変位前において $|e_x| = |e_y| = |e_z| = 1$ にとる。種々の状態の変位、変形、応力に関する諸量 $()$ を $()^{(0)}$:座屈前の一軸曲げの量、 $()^{(1)}$:座屈後と座屈前の和、と表わす。肩付に $(0), (1)$ の付かない変位、変形、応力に関する量は座屈に伴う増分を表わす。(ただしFig. 3中のもは $(0), (1)$ が付かないがFig. 3は一般的な状態を表わす。) $()^{(2)} = ()^{(0)} + ()$ である。その他すべての諸量について、 $()' = d() / dz$ であり、 $()^*$ は板厚中心面上の諸量を表わす。

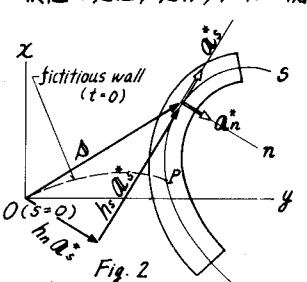


Fig. 2

2. 変位場 分岐座屈問題でのつり合い式と境界条件を仮想仕事の原理によって導く場合、変位場においては変位パラメーターの座屈に伴う増分の二次項

までを考慮すればよい。変位ベクトル $v^{(0)}$ を次のように表わす。

$$v^{(0)} = u^{(0)} e_x + v^{(0)} e_y + w^{(0)} e_z \quad (3)$$

変位パラメータとして z 軸上の変位成分 $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ および Fig. 3 に示す角変位 $\varphi_y^{(0)}$ を採用する。平面 $\hat{A}_3(\hat{e}_x \times \hat{e}_y)$ は変位後も z 軸 (\hat{e}_z) に直交する平面であり \hat{e}_x, \hat{e}_y はその平面上にある。平面 \hat{A}_3 と平面 $A_1(e_x \times e_y)$ の交線を \vec{ON} とすると、角変位 $\varphi_y^{(0)}$ は \hat{e}_y と \vec{ON} の成す角である。座屈前は一軸曲げであるので、 $u_0^{(0)} = \varphi_y^{(0)} = 0$ である。変位パラメータの増分として、 u_0, φ_y のみを考え ($v_0 = w_0 = 0$)、仮定 (iii)~(v) に従い変位場を幾何学的に組み立てていくと以下の結果を得る。(1) 系の場の一般点の変位成分は、

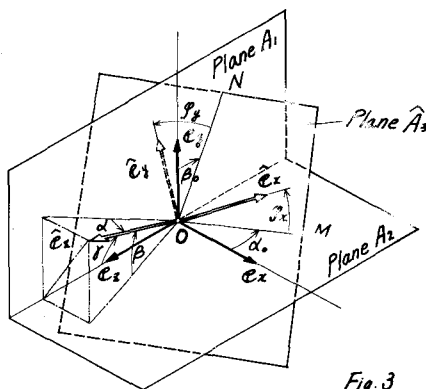


Fig. 3

$$\left. \begin{aligned} u^{(0)} &= u_0 - \frac{1}{2} x (\alpha^2 + \varphi_y^2) - y \varphi_y + \hat{w}_x^{(0)} \hat{\kappa}_y + \hat{w}_z^{(0)} \alpha \hat{\kappa}_y \\ v^{(0)} &= v_0^{(0)} + y (\cos \beta^{(0)} - 1) + x (-\sin \beta^{(0)} \alpha + \cos \beta^{(0)} \varphi_y) + y (\sin \beta^{(0)} \alpha \varphi_y - \frac{1}{2} \cos \beta^{(0)} \varphi_y^2) \\ &\quad + \hat{w}_y^{(0)} \cos \beta^{(0)} \hat{\kappa}_y + \hat{w}_z^{(0)} \sin \beta^{(0)} \hat{\kappa}_y \\ w^{(0)} &= w_0^{(0)} - y \sin \beta^{(0)} - x (\cos \beta^{(0)} \alpha + \sin \beta^{(0)} \varphi_y) + y (\cos \beta^{(0)} \alpha \varphi_y + \frac{1}{2} \sin \beta^{(0)} \varphi_y^2) \\ &\quad - \hat{w}_y^{(0)} \sin \beta^{(0)} \hat{\kappa}_y + \hat{w}_z^{(0)} \cos \beta^{(0)} \hat{\kappa}_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{ここに、} \sin \beta^{(0)} = (1/\hat{g}_0^{(0)})^{1/2} (v_0^{(0)} - \kappa_0 w_0^{(0)}), \quad \cos \beta^{(0)} = (1/\hat{g}_0^{(0)})^{1/2} \{1 + (w_0^{(0)} + \kappa_0 v_0^{(0)})\} \quad (5)$$

$$\alpha = (1/\hat{g}_0^{(0)})^{1/2} u_0, \quad \hat{\kappa}_y = (1/\hat{g}_0^{(0)})^{1/2} \hat{\mu}_y, \quad \hat{\mu}_y = \varphi_y + \hat{\mu}_y' \alpha \quad (6)$$

$$\hat{g}_0^{(0)} = (1 + \varepsilon_{x0}^{(0)})^2 = (v_0^{(0)} - \kappa_0 w_0^{(0)})^2 + \{1 + (w_0^{(0)} + \kappa_0 v_0^{(0)})\}^2, \quad \hat{\mu}_y^{(0)} = \kappa_0 - \beta^{(0)} \quad (7)$$

であり、 $\varepsilon_{x0}^{(0)}$ は (1) 系の場における z 軸上の線素の通常の伸びひずみである。さらに次の量を定義しておく。

$$\hat{g}^{(0)} = l^*/r_0 (1 + \varepsilon_x^{(0)}) = \hat{g}_0^{(0)} (1 + y \hat{\kappa}_y^{(0)}), \quad \hat{\kappa}_y^{(0)} = (1/\hat{g}_0^{(0)})^{1/2} \hat{\mu}_y^{(0)} \quad (8)$$

$$l = \partial x / \partial s, \quad m = \partial y / \partial s, \quad h_s = l^* x + m^* y, \quad h_n = -m^* x + l^* y \quad (9)$$

ここに、 $\varepsilon_x^{(0)}$ は (2) 系の場での一般点の z 方向線素の通常の伸びひずみであり、 h_s, h_n は変位前の状態で点 O から断面上の任意点へ引いたベクトル s の a_s^*, a_n^* 成分である。 a_s, a_n は S, N 座標の変位前の基底ベクトルであり、 $|a_s^*| = |a_n^*| = 1$ とする。このとき

$$\hat{w}_x^{(0)} = (\hat{g}^{(0)}/\hat{g}_0^{(0)})^{1/2} \int_0^s (\hat{g}_0^{(0)}/\hat{g}^{(0)}) h_n^* ds - (\hat{g}_0^{(0)}/\hat{g}^{(0)})^{1/2} h_s n \quad \text{であり、さらに} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{sx}^{*(0)} &= -\frac{1}{2} l^* \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} ds \right\}^2 + m^* \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} ds \right\} ds \\ \hat{p}_{nx}^{(0)} &= \frac{1}{2} m^* \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} ds \right\}^2 + l^* \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} ds \right\} ds \\ \hat{p}_{sy}^{(0)} &= -\frac{1}{2} m^* \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} ds \right\}^2 + l^* \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} ds \right\} ds \\ \hat{p}_{ny}^{(0)} &= -\frac{1}{2} l^* \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} ds \right\}^2 - m^* \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} \left\{ \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} ds \right\} ds \\ \hat{p}_{sx}^{(0)} &= -m^* \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} ds + l^* \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} ds \\ \hat{p}_{nx}^{(0)} &= -l^* \int_0^s \hat{\kappa}_1^{(0)} ds - m^* \int_0^s \hat{\kappa}_2^{(0)} ds \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\kappa}_1^{(0)} &= (\hat{g}_0^{(0)}/\hat{g}^{(0)}) l^* \\ \hat{\kappa}_2^{(0)} &= (\hat{g}_0^{(0)}/\hat{g}^{(0)}) m^* \\ \hat{\kappa}_1^{(0)} &= (\hat{g}_0^{(0)}/\hat{g}^{(0)}) l^* \\ \hat{\kappa}_2^{(0)} &= (\hat{g}_0^{(0)}/\hat{g}^{(0)}) m^* \\ \hat{g}_0^{(0)} &= (1 + \varepsilon_{x0}^{(0)} + \varepsilon_{x0}^*) \\ \hat{g}^{(0)} &= (1 + \varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_x^*) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{g}_0^{(0)} &= (1 + \varepsilon_{x0}^{(0)} + \varepsilon_{x0}^*) \\ \hat{g}^{(0)} &= (1 + \varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_x^*) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

とおくと

$$\hat{w}_x^{(0)} = \int_0^s \hat{p}_{sx}^{*(0)} ds + n \hat{p}_{nx}^{*(0)}, \quad \hat{w}_y^{(0)} = \int_0^s \hat{p}_{sy}^{*(0)} ds + n \hat{p}_{ny}^{*(0)}, \quad \hat{w}_z^{(0)} = \int_0^s \hat{p}_{sz}^{*(0)} ds + n \hat{p}_{nz}^{*(0)} \quad \text{である。} \quad (14)$$

式 (13) 中の $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_x$ はそれぞれ z 軸上と板厚中心面上の z 方向線素の通常の伸びひずみの座屈による増分であり式 (16) に示すものである。ひずみテンソル $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ のうち零でないものは、次の3つとなる。

$$\tilde{\varepsilon}_{ss} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{g}_0^{(0)}}{\hat{g}^{(0)}} \right)^2 (n \hat{\kappa}_y)^2, \quad \tilde{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{l^*}{r_0} \right) (1 + \varepsilon_x^{(0)}) \varepsilon_x^*, \quad \tilde{\varepsilon}_{zs} = - \left(\frac{\hat{g}_0^{(0)}}{\hat{g}^{(0)}} \right)^2 n \hat{\mu}_y \quad (15)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= \varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_x, \quad \varepsilon_x = \frac{l^*}{r_0} \{ \varepsilon_{x0} + x \hat{\mu}_x + y \hat{\mu}_y + (\hat{w}_z^{(0)} \hat{\kappa}_y)' + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{g}_0^{(0)}}{\hat{g}^{(0)}} \right)^2 (\hat{p}^{(0)})^2 (\hat{\kappa}_y)^2 \} \\ \varepsilon_{x0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{g}_0^{(0)}}{\hat{g}^{(0)}} \right)^2 \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\hat{\mu}_x = -\alpha + (\kappa_0 - \beta^{(0)}) \varphi_y, \quad \hat{\mu}_y = (\kappa_0 - \beta^{(0)}) \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \varphi_y^2) \right\} + \alpha' \varphi_y \quad (17)$$

$$(\hat{\rho}^{(0)})^2 = (x - \hat{\kappa}_y^{(0)} \hat{\omega}_z^{(0)})^2 + y^2 + 2\hat{\kappa}_z^{(0)} (\hat{g}_x^{(0)} / \hat{g}_y^{*(0)})^{1/2} \hat{\omega}_y^{(0)} \quad (18)$$

3. つり合い式と境界条件 一軸曲げを受ける部材が外力や境界条件の変化を伴うことなく \$y-z\$ 平面外へ変位する問題を横座屈という。したがって(10)系の場合で部材中間部に体積力 \$P^{(0)}\$ と部材両端断面に表面力 \$\bar{\sigma}^{(0)}\$

$$P^{(0)} = P_x^{(0)} e_x + P_y^{(0)} e_y + P_z^{(0)} e_z, \quad \bar{\sigma}^{(0)} = \bar{\sigma}_x^{(0)} e_x + \bar{\sigma}_y^{(0)} e_y + \bar{\sigma}_z^{(0)} e_z \quad (19)$$

を受ける部材の座屈時に対し、仮想仕事の原理は次のように表わせる。

$$\iiint_V \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)} \delta \tilde{\epsilon}_{ij}^{(0)} dV - \iiint_V P^{(0)} \cdot \delta v^{(0)} dV - \left[\bar{n}_z \iint_A \bar{\sigma}^{(0)} \cdot \delta v^{(0)} dA \right]_{z=z_1}^{z=z_2} = 0 \quad (20)$$

ここに \$\tilde{\sigma}^{(0)}\$ は応力テンソルであり、\$\bar{n}_z\$ は \$z=z_1, z_2\$ における部材両端断面の変形前における外向き単位法線ベクトルの \$e_z\$ 成分である。\$z_2 > z_1\$ のとき \$\bar{n}_z = -1\$ (\$z=z_1\$), \$\bar{n}_z = 1\$ (\$z=z_2\$) また、\$\int_A dA\$ は断面にわたって積分することを意味し、\$dV = (r_0/r) dA dz\$ である。式(20)において変分を受けるのは座屈時の増分変位 \$u_0, \varphi_y\$ であり、ここでは分岐点近傍だけを問題としているので、座屈に伴う増分変位 \$u_0, \varphi_y\$ および増分応力は極く微小とし、式(20)の変分量の係数において、それらの二次項は無視できる。また増分ひずみは極く微小で、\$1 + \epsilon_z^{*(0)} \gg \epsilon_z^{*(0)}\$ であるので、便宜的にこれを理由とし、式(7b, c), (15c), (16b)中で変分前に、

$$\hat{g}^{*(0)} \rightarrow \hat{g}^{*(0)} \quad \text{したがって} \quad \hat{\omega}_z^{(0)} \rightarrow \hat{\omega}_z^{(0)} \quad \text{とする} \quad (21)$$

$$\text{応力テンソルとその物理成分の関係は、} \quad \bar{\sigma}_x^{(0)} = \tilde{\sigma}_{xx}^{(0)} (a_{xx})^{1/2} (\hat{a}_{xx}^{(0)})^{1/2}, \quad \tau_{xz}^{(0)} = \tilde{\sigma}_{xz}^{(0)} (a_{xz})^{1/2} (\hat{a}_{xz}^{(0)})^{1/2} \quad (22)$$

$$\text{ここに、} \quad \hat{a}_{xx}^{(0)} = a_{xx} + 2\tilde{\epsilon}_{xx}^{(0)}, \quad \hat{a}_{zz}^{(0)} = a_{zz} + 2\tilde{\epsilon}_{zz}^{(0)}, \quad (a_{xz})^{1/2} = r_0/r, \quad (a_{zz})^{1/2} = 1 + \kappa^* n \approx 1 \quad (23)$$

である。また \$\tilde{\sigma}_{zz}^{(0)} = 0\$ と考えられるので、式(20)に式(3), (15), (19)を代入し部分積分すると、座屈時の応力増分に関するつり合い式と境界条件が次のように求まる。ただし紙面の都合上 \$P^{(0)} = 0\$ とした。

$$\left. \begin{aligned} \text{つり合い式} \quad \left\{ (1/\hat{g}_y^{(0)})^{1/2} (M_x - M_y^{(0)} \varphi_y)' + (N^{(0)} - M_y^{(0)} \hat{\kappa}_y^{(0)}) \alpha + T \hat{\kappa}_y^{(0)} \right\}' = 0 \\ T' - (M_x \hat{\mu}_y^{(0)} - M_y^{(0)} \hat{\mu}_x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{境界条件} \quad u_0 = 0 \quad \text{または} \quad (1/\hat{g}_y^{(0)})^{1/2} (M_x - M_y^{(0)} \varphi_y)' + (N^{(0)} - M_y^{(0)} \hat{\kappa}_y^{(0)}) \alpha + T \hat{\kappa}_y^{(0)} = 0 \\ \alpha = 0 \quad \text{または} \quad M_x - M_y^{(0)} \varphi_y = \bar{n}_z \bar{M}_x \\ \varphi_y = 0 \quad \text{または} \quad T = \bar{n}_z \bar{T}, \quad \hat{\kappa}_y = 0 \quad \text{または} \quad M_w = \bar{n}_z \bar{M}_w \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\text{ここに} \quad T = -T_w + T_s + K^{(0)} \hat{\kappa}_y \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x = \int_A \bar{\sigma}_x dA, \quad M_w = \int_A \bar{\sigma}_x \hat{\omega}_z^{(0)} dA, \quad T_w = \int_A (1/\hat{g}_y^{(0)})^{1/2} \bar{\sigma}_x' \hat{\omega}_z^{(0)} dA \\ T_s = -\int_A (\hat{g}_x^{(0)} / \hat{g}_y^{*(0)})^{1/2} \tau_{xz} n dA \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$N^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_z dA, \quad M_y^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_z y dA, \quad K^{(0)} = \int_A (\hat{g}_x^{(0)} / \hat{g}_y^{*(0)})^{1/2} \bar{\sigma}_z^{(0)} (\hat{\rho}^{(0)})^2 dA \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{また} \quad \bar{M}_{xx}^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_x x dA, \quad \bar{M}_{yy}^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_y y dA, \quad \bar{M}_{zy}^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_z y dA, \quad \bar{M}_{wxz}^{(0)} = 2 \int_A \bar{\sigma}_x \hat{\omega}_z^{(0)} dA \\ \bar{M}_{wxz}^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_x \hat{\omega}_z^{(0)} dA, \quad \bar{M}_{wy}^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_y \hat{\omega}_y^{(0)} dA, \quad \bar{M}_{wz}^{(0)} = \int_A \bar{\sigma}_z \hat{\omega}_y^{(0)} dA \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{とおくと、} \quad \bar{M}_x = \bar{M}_{xx}^{(0)} \alpha - (\bar{M}_{yy}^{(0)} \sin \beta^{(0)} + \bar{M}_{zy}^{(0)} \cos \beta^{(0)}) \varphi_y - \bar{M}_{wxz}^{(0)} \hat{\kappa}_y \\ \bar{T} = (\bar{M}_{yy}^{(0)} \sin \beta^{(0)} + \bar{M}_{zy}^{(0)} \cos \beta^{(0)}) \alpha - (\bar{M}_{xx}^{(0)} + \bar{M}_{yy}^{(0)} \cos \beta^{(0)} - \bar{M}_{zy}^{(0)} \sin \beta^{(0)}) \varphi_y \\ \bar{M}_w = \bar{M}_{wxz}^{(0)} \alpha + (\bar{M}_{wy}^{(0)} \cos \beta^{(0)} + \bar{M}_{wz}^{(0)} \sin \beta^{(0)}) \hat{\kappa}_y \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

である。断面力変位の関係は、\$\bar{\sigma}_z = E \epsilon_z\$, \$\tau_{xz} = \tau_{xz}^* + 2G (r_0/r) \tilde{\epsilon}_{xz}\$ から求まる。

4. むすび ここで行った解析も式(21)に示すように変分前に微小ひずみを導入したため厳密ではない。Fig. 4に示すように座屈前にせん断力 \$Q_y^{(0)}\$ が働いていると、座屈時に断面が歪ることにより、\$Q_y^{(0)}\$ が左右向き異なる \$e_x\$ 方向の力を作りだし、このため断面に付加モーメントを生ずるような効果が無視されている。ただし薄肉であるので板厚方向せん断応力 \$\tau_{xz}^{(0)} = 0\$ と見なせる場合はFig. 5に示す断面について厳密といえる。しかし座屈が問題となる場合、せん断応力の効果は直応力に比べ無視できるといえそうである。式(10)からそう関数は変形の影響を受けることがわかる。

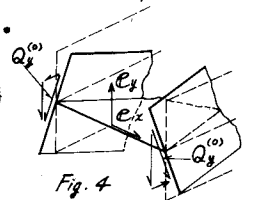


Fig. 4

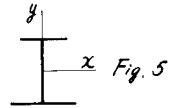


Fig. 5