I-127　二層板の載荷点近傍の応力性状について

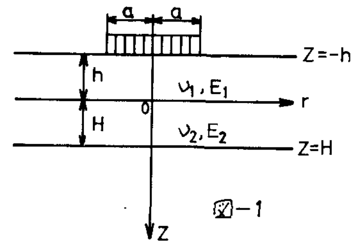
北海道大学　正員　芳村　仁
北海道大学　正員　○三上　隆

1. まえがき

本報告は土木構造物に見られる弾性系二層板の表面に円形鉛直等分布荷重（車輪荷重）が作用した場合の載荷点近傍の応力性状を調べるため、軸対称問題として解析し、上層板、下層板の境界面が完全に粗の場合について検討したものである。この種の解析例としてSneddon[1]らによって均一な厚板の問題を解かれている。本報告は二層系板のモデルを道路橋に見られる舗装（アスファルト）―床版（鋼床版，鉄筋コンクリート床版）を例にとり、上層板、下層板の弾性係数の差、板厚が応力にどのような影響を与えるかを検討したものである。

2. 解析方法と応力式

本報告は軸対称問題を取り扱かっておるので三次元弾性方程式は円柱座標(r, θ, z)を使い変位成分を応力関数Φを用いることにより、重調和方程式$\nabla^4\Phi=0$.（ここで$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$）に帰することができる。これに、Hankel変換を施すことによって4階の微分方程式$(d^2/dz^2-m^2)^2G(m,z)=0$,（$G\equiv\Phi$の0次のHankel変換、$m\equiv$パラメータ）で表わすことができる。その解$G(m,z)$（$G=(A+Bz)e^{-mz}+(C+Dz)e^{mz}$, A,B,C,Dは境界条件より定まる定数）の逆変換を行い応力、変位成分に代入することにより、変位、応力の一般式が得られる。



図−1

本報告は弾性二層板として図−1に示す様な1層板（ν_1=ポアソン比，E_1=弾性係数，h=板厚），2層板（ν_2, E_2, H），a=荷重半径の場合を考える。上層板の関数にはSuffix 1、下層板の関数にはSuffix 2をつけて表わすと、荷重、境界条件は次の様に与えられる。

荷重条件:

$$\begin{cases}\sigma_{zz}^1(r,\theta)=-p=\mathrm{const}\ (0\le r\le a)\\ \sigma_{zz}^1(r,\theta)=0\quad (r>a)\\ \sigma_{rz}^1(r,\theta)=0\end{cases}$$

境界条件

$$\begin{cases}z=-h\text{で}\ \sigma_{zz}^1=M(m),\ \sigma_{rz}^1=0\\ z=0\text{で}\ \sigma_{zz}^1=\sigma_{zz}^2,\ \sigma_{rz}^1=\sigma_{rz}^2\\ \qquad u_z^1=u_z^2,\ u_r^1=u_r^2\\ z=H\text{で}\ \sigma_{zz}^2=0,\ \sigma_{rz}^2=0\end{cases}$$

ここで　$M(m)=-\frac{pa}{m}J_1(ma)$

8個の定数を決めることにより応力成分の表示式が得られる。$\nu_1=0.5$, $\nu_2=\nu_2$とすると、たとえばσ_{rz}^2は

$$\begin{aligned}\sigma_{rz}^2=\int_0^\infty\frac{2M(m)}{\Delta}m\Big[&\{m(ch-Az)-\alpha\beta\}e^{m(h+2H-z)}+\{Bm(2mhz-h-z)+\alpha\beta\}e^{-m(h-2H+z)}-\{Bm(2mhz+h+z)-\alpha\beta\}e^{m(h-2H+z)}\\&+\{m(ch-Az)+\alpha\beta\}e^{-m(h+2H-z)}+\{4m^3BHh(H-z)+2m^2HB(H+h-z)+m(hB+Dz+2H\alpha\beta)+\alpha\beta\}e^{m(h-z)}\\&+\{2m^2(H-z)(AH-ch)-m\{c(h+z)+2H\alpha\beta\}-\alpha\beta\}e^{-m(h+z)}+\{4m^3BHh(H-z)-2m^2HB(H+h-z)+m(hB+Dz+\\&2H\alpha\beta)-\alpha\beta\}e^{-m(h-z)}+\{2m^2(H-z)(ch-AH)-m\{c(h+z)+2H\alpha\beta\}+\alpha\beta\}e^{m(h+z)}\Big]J_1(mr)\,dm\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\Delta=&AC\{e^{2m(h+H)}+e^{-2m(h+H)}\}-BD\{e^{2m(h-H)}+e^{-2m(h-H)}\}+\{BC(1+4m^2h^2)-AD\}(e^{2mH}+e^{-2mH})+2(2ABm^2H^2\\&+1-F)(e^{2mh}+e^{-2mh})+4[m^2\{4B^2m^2h^2H^2+(A^2+B^2)H^2+(B^2+C^2)h^2-2hH(AC+BD)\}+1+F]\end{aligned}$$

さらに　$\alpha=\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\frac{E_1}{E_2}$　　$A=1+\alpha$, $B=1-\alpha$　$C=4\alpha\nu_2-3\alpha-1$, $D=4\alpha\nu_2-3\alpha+1$.

$\beta=1-2\nu_2$　　$F=\alpha^2(8\nu_2^2-12\nu_2+5)$

3. 解析例

解析モデルは次の2種類を考えた。モデル(A):アスファルト舗装―鋼床版、モデル(B):アスファルト舗装―鉄筋コンクリート床版。計算に用いた数値はモデル(A)の場合、$h=5cm$, $\nu_1=0.5$, $E_1=10^4 kg/cm^2$, $H=1.5cm$, $\nu_2=0.3$, $E_2=2.1\times10^6 kg/cm^2$, $a/h=1$, $H/h=0.3$, $\alpha=0.4127\times10^{-2}$, モデル(B)の場合は、$h$, ν_1, E_1 はモデル(A)に同じ. $H=20cm$, $\nu_2=0.2$, $E_2=3\times10^5 kg/cm^2$, $a/h=1$, $H/h=4$, $\alpha=0.2667\times10^{-1}$ を用いた。なお、モデル(A),(B)とも表面に作用する垂直荷重が、$r=r\ (r>a)$ でのせん断応力 σ_{rz} の総和と釣合わなければならない。すなわち

$$2\pi r(h+H)\int_{-h}^{H}\sigma_{rz}dz=\pi a^2 P$$

の関係が成立っていることは数値的に確かめられている。計算結果として図-2にモデル(A)の応力 σ_{zz} 図を図-3にモデル(B)の σ_{zz} 図を示す。又、図-4, 図-5にモデル(A),(B)の応力 σ_{rz} を、図-6, 図-7にモデル(A),(B)の応力 σ_{rr} を示す。

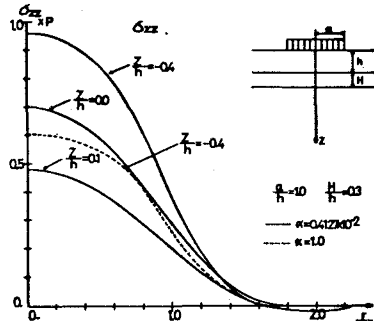


図-2

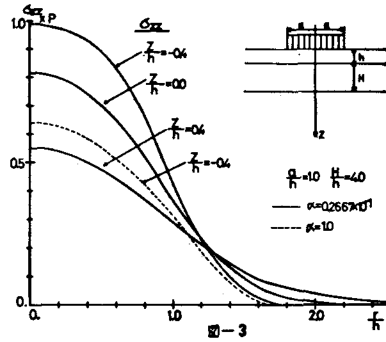
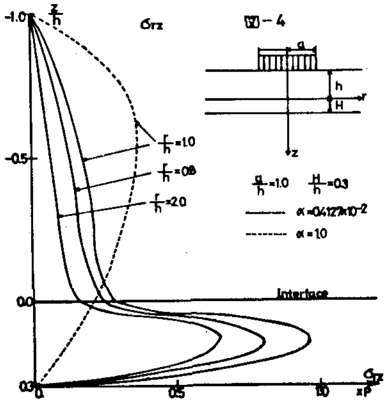


図-3

図-4


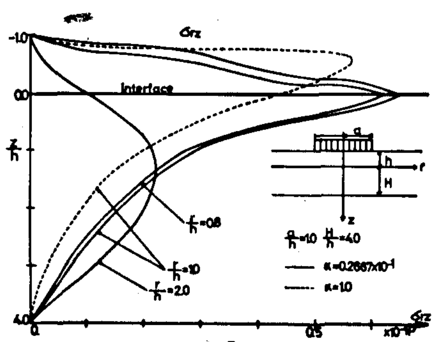


図-5

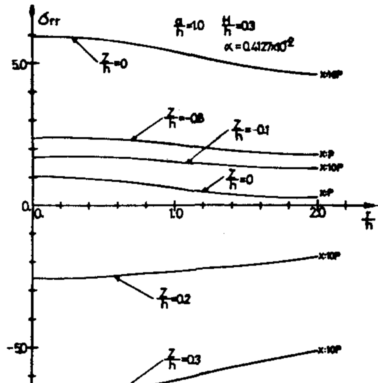


図-6

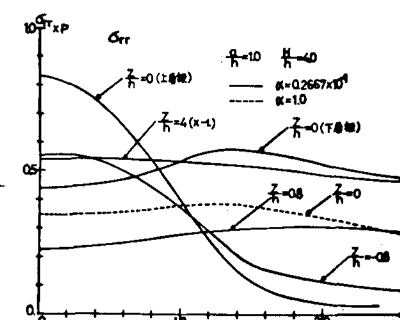


図-7

以上の結果より E_1(上層板の弾性係数) < E_2(下層板の弾性係数)のとき、

- 応力 σ_{zz} は均一な板と比較すると二層板の場合には、上層程応力が大きくなり、それが上層、下層板の弾性係数比 E_1/E_2 の影響を受ける。
- 応力 σ_{rz} は上層、下層板の弾性係数比 E_1/E_2 が小さくなると下層板の応力が大きくなる。モデル(B)では上層、下層板の境界面付近で応力の集中が見られる。又、$\alpha=1$ に近ずく程上層に応力が集中する。
- 応力 σ_{rr} は応力 σ_{zz}, σ_{rz} と比べると特に、上層、下層板の弾性係数比の影響を受け、その値(E_1/E_2)が小さい程下層板に応力が集中している。

参考文献

1) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms (1951). McGraw-Hill.

2) Yohimura, J., Ushio, S., Sugawara, T. : Stresses in Multi Layered systems, Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ., Vol. XIII, NO.2, 1972.

3) Jung. H : Ein Beitrag zur Loveschen Verschiebungsfunktion, Ingenieur-Archiv, XVIII, Band 1950.