I-126　サンドイッチ板に関する一つの考察

名古屋工業大学　正員　松浦 聖
名古屋工業大学大学院　学生員　○木全 隆

まえがき－本解析は橋梁の鋼床版などに使用されている三層の長方形サンドイッチ板における曲げ応力状態を調べるものである。長方形サンドイッチ板の厳密解は，例えば全ポテンシャルエネルギの停留条件から得られる基礎方程式[1]を2重フーリエ級数に展開することによっても得られるが，ここでは変位法による有限要素解析を行っている。

仮定[2]－この解析においては次に示めす仮定をもちいた。

1. 表板は比較的高い弾性係数をもち，曲げと引張りに抵抗するものとする。
2. 心材では垂直応力は働かず，横せん断力にのみ抵抗するものとする。
3. 二板の表板は等しいタワミを生ずるものとするので，タワミ方向への垂直応力は生じない。しかし，それぞれの表板は面内方向への変位を考えるとき独立である。
4. 材料は表板・心材ともに直交異方性とする。

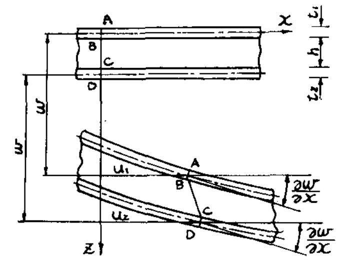


図1　タワミと面内変位

応力－ひずみ関係[3]－図1および図2を参照して，次式のように書かれる。

i)表板を$f_i$ $(i=1,2)$とし，それぞれの曲げモーメント，ねじりモーメント，および面内力を添字iをもちいて表わすと，

$$\left.\begin{aligned} M_{xi} &= -\left[(d^b)_{xi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (d^b)_{1i}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \\ M_{yi} &= -\left[(d^b)_{1i}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (d^b)_{yi}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \\ M_{xyi} &= 2(d^b)_{xyi}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad (1\cdot a)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &(d^b)_{xi} = E_{xi}t_i^3/12(1-\nu_{xi}\nu_{yi}),\ (d^b)_{yi} = E_{yi}t_i^3/12(1-\nu_{xi}\nu_{yi}) \\ &(d^b)_{xyi} = G_{xyi}t_i^3/12,\ (d^b)_{1i} = \nu_{yi}(d^b)_{xi} = \nu_{xi}(d^b)_{yi} \end{aligned}\right\} \quad (1\cdot b)$$

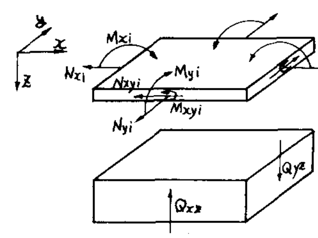


図2　表板と心材の応力

$$\left.\begin{aligned} N_{xi} &= (d^p)_{xi}\frac{\partial u_i}{\partial x} + (d^p)_{1i}\frac{\partial v_i}{\partial y} \\ N_{yi} &= (d^p)_{1i}\frac{\partial u_i}{\partial x} + (d^p)_{yi}\frac{\partial v_i}{\partial y} \\ N_{xyi} &= (d^p)_{xyi}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot a)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &(d^p)_{xi} = E_{xi}t_i/(1-\nu_{xi}\nu_{yi}),\ (d^p)_{yi} = E_{yi}t_i/(1-\nu_{xi}\nu_{yi}) \\ &(d^p)_{xyi} = G_{xyi}t_i,\ (d^p)_{1i} = \nu_{yi}(d^p)_{xi} = \nu_{xi}(d^p)_{yi} \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot b)$$

ii)心材について

$$Q_{xz} = (d^s)_{xz}\gamma_{xz},\ Q_{yz} = (d^s)_{yz}\gamma_{yz} \quad (3\cdot a)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &(d^s)_{xz} = G_{xz}\cdot h,\ (d^s)_{yz} = G_{yz}\cdot h \\ &\gamma_{xz} = \frac{c}{h}\left(\frac{v_2 - v_1}{c} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \gamma_{yz} = \frac{c}{h}\left(\frac{u_2 - u_1}{c} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ &C = h + \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot b)$$

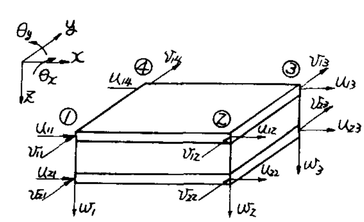


図3　要素の節点変位

有限要素解析[4]

変位関数および節点変位ー要素の節点変位を図3に示すように決めた。そして，タワミ$w$，面内変位$u_1, v_1, u_2, v_2$を次式で仮定した。

$$\left.\begin{aligned} w &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \\ u_1 &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy, \quad u_2 = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \\ v_1 &= d_1 + d_2x + d_3y + d_4xy, \quad v_2 = e_1 + e_2x + e_3y + e_4xy \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ここで，節点変位$\{\delta\}^e = \{[\delta_1],[\delta_2],[\delta_3],[\delta_4]\}^T$ $([\delta_i] = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, u_{1i}, v_{1i}, u_{2i}, v_{2i}\})$を用いて，未定係数$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\}$は，求められ得る。したがって変位関数$\{F\}$は，式(6)のように求められる。

$$\{A\} = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\}\}^T = [C]^{-1}\{\delta\}^e \qquad (5)$$

$$\{F\} = \{w, u_1, v_1, u_2, v_2\}^T = [P]\{A\} = [P][C]^{-1}\{\delta\}^e \equiv [N]\{\delta\}^e \qquad (6\cdot a)$$

ここで

$$[P] = \begin{bmatrix} 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3 & & & & \\ & 1\ x\ y\ xy & & 0 & \\ & & 1\ x\ y\ xy & & \\ & 0 & & 1\ x\ y\ xy & \\ & & & & 1\ x\ y\ xy \end{bmatrix} \qquad (6\cdot b)$$

つぎに，式(1),(2),(3)に対応するひずみを考えると次式のようになる。

$$\{\varepsilon\} = \left\{-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right\} \qquad (7)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{A\} = [Q][C]^{-1}\{\delta\}^e \equiv [B]\{\delta\}^e \qquad (8)$$

剛性マトリックスおよび等価節点力ー要素の剛性マトリックス$[K]^e$は，式(1),(2)(3)および式(8)より次のように与えられる。

$$[K]^e = \iint [B]^T[D][B]\,dxdy = \{[C]^{-1}\}^T \iint [Q]^T[D][Q]\,dxdy\,[C]^{-1} \qquad (9)$$

ここで，$[D]$は式(1),(2)(3)をまとめてマトリックス表示したときのものであり，次に示される。

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1^b & & & & \\ & D_1^p & & 0 & \\ & & D^s & & \\ & 0 & & D_2^b & \\ & & & & D_2^p \end{bmatrix}, \quad [D_i^b] = \begin{bmatrix} (d^b)_{xi} & (d^b)_{1i} & 0 \\ (d^b)_{1i} & (d^b)_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & (d^b)_{xyi} \end{bmatrix}, \quad [D_i^p] = \begin{bmatrix} (d^p)_{xi} & (d^p)_{1i} & 0 \\ (d^p)_{1i} & (d^p)_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & (d^p)_{xyi} \end{bmatrix}, \quad [D^s] = \begin{bmatrix} (d^s)_{xz} & 0 \\ 0 & (d^s)_{yz} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

この剛性マトリックスに対する等価節点力$[Q]^e$は，物体力を$\{p\}$とすると次式で与えられる。

$$[Q]^e = -\iint [N^*]^T\{p\}\,dxdy = -\{[C]^{-1}\}^T \iint [P^*]^T\{p\}\,dxdy \qquad (11)$$

ただし，$[N^*]$は$[N]$中において$\{p\}$の方向に無関係なものを除いたマトリックスである。また$[P^*]$も同様である。
以上により求められた要素の剛性マトリックスと等価節点力を板全体について重ね合せ，境界条件を考慮してこの連立方程式を解くことによって節点変位を知ることができる。そして，求める応力状態は，式(1),(2),(3)および式(8)を用いることにより得られる。

解析例としては，長方形サンドイッチ板を弾性基礎上においた場合の応力状態を与える。特別な例として，弾性係数に不連続が生じて不等沈下を起した場合についても解析している。ここで，地盤の弾性係数は板の座標の関数として分布させるものとする。

参考文献

1) 林毅；軽構造の理論とその応用(下)，第15章サンドイッチ構造 pp.1225-1238
2),3). Khatua, T.P. & Cheung, Y.K.; Triangular Element for Multilayer Sandwich Plates, ASCE, No.EM5 Oct.1972
4). Zienkiewics, O.C. & Cheung, Y.K.; The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics