

信州大学 正員 夏目正太郎  
谷本勉之助  
石川 清志

1. ま え が き

この問題は、弾性定数の違う2枚の板が接合されて、両端では一様引張りを受け、上下の平行な対向二辺には外力なく拘束も与えず自由辺である(図-1)所の2種の問題は、接触問題として、一般には複雑な応力分布、変位分布が如何なる量で示されるかに興味があり、特に接触部附近において複雑な様相を示す筈である。接続の条件としては、2方向の変位が連続であり、かつ長手方向の直応力と、せん断応力とが連続である以外は無い。次に図-1に示す複合板の数値計算結果を示す。

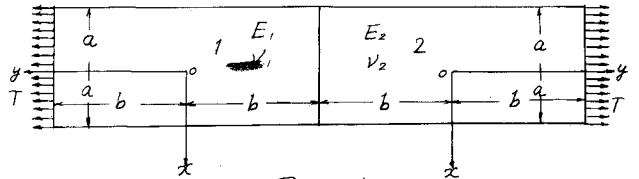


図 - 1

なる量で示されるかに興味があり、特に接触部附近において複雑な様相を示す筈である。接続の条件としては、2方向の変位が連続であり、かつ長手方向の直応力と、せん断応力とが連続である以外は無い。次に図-1に示す複合板の数値計算結果を示す。

2. Airy の 応 力 関 数

この応力関数には 複素数パラメータ  $\gamma$  -  $\gamma$  未定係数としておき、

$$\chi_1(x, y) = \sum_n \frac{\alpha^2}{\lambda^2} L \cos \frac{\lambda x}{\alpha}, \frac{\lambda x}{\alpha} \sin \frac{\lambda x}{\alpha} \cdot N_n \{ \cosh \frac{\lambda y}{\alpha}, \sin \frac{\lambda y}{\alpha} \} + \frac{T x^2}{2} \quad (1)$$

と書き、第一境界条件である平行な対向二辺に外力がない所から、未定係数マトリクスが縮小されて、 $N$ が $C$ となり

$$\chi_1(x, y) = \sum_n \frac{\alpha^2}{\lambda^2} L \cos \frac{\lambda x}{\alpha}, \frac{\lambda x}{\alpha} \sin \frac{\lambda x}{\alpha} \begin{bmatrix} -\lambda \sin \lambda \\ \cos \lambda \end{bmatrix} L \cosh \frac{\lambda y}{\alpha}, \sinh \frac{\lambda y}{\alpha} \cdot C_n + \frac{T x^2}{2} \quad (2)$$

$$2\lambda_n + \sin 2\lambda_n = 0 \quad (3)$$

を得る。この(3)式が固有値方程式であり、 $\lambda_n$ は複素数パラメータである。この固有値 $\lambda_n$ に関しては、すでに紹介済みであり、今回の計算にはそれらを使用した。

3. 接 続 条 件 の 状 態 ベ ク ト ル

先にも述べたように 連続であるべき変位と、応力の形を示すと、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1+\nu)\alpha}{E\lambda} \\ \frac{(1+\nu)\alpha}{E\lambda} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \lambda p, & \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin \lambda p - \lambda p \cos \lambda p \\ -\cos \lambda p, & \frac{2}{1+\nu} \cos \lambda p - \lambda p \sin \lambda p \\ -\cos \lambda p, & 2 \cos \lambda p - \lambda p \sin \lambda p \\ \sin \lambda p, & -\sin \lambda p - \lambda p \cos \lambda p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda \sin \lambda \\ \cos \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{\alpha}, \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{\alpha} \\ \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{\alpha}, \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{\alpha} \\ \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{\alpha}, \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{\alpha} \\ \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{\alpha}, \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{\alpha} \end{bmatrix} C_n + T \begin{bmatrix} -\frac{\nu x}{E} \\ \frac{y}{E} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで  $p = x/a$ ,  $\operatorname{ch} = \cosh$ ,  $\operatorname{sh} = \sinh$ ,  $\cdot$  は便宜的記法で左側のマトリクスの同行間乗算を示す。

4. 外 力 作 用 の 境 界 条 件

図-1において、左右両端には一様分布の引張り力が作用しているので、境界条件としては

$$\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

となる。(4), (5) 式は Legendre 関数による Neumann 級数展開を各項別整理として、係数マトリクスと、未定数と、荷重マトリクスとに分類され、これらは各固有値ごとに展開される。その際共役固有値を導入すると、複素数演算過程において、虚部が自ら消去され、結果的には、実部のみを取り出せばよいこととなる上に、高次の固有値をとることによる双曲線関数の大数による精度落ちからも避けられると思う。

$$\text{接合部状態ベクトルの表示: } \mathbb{W}(x, y) = \sum_n P_n(\rho) [L A_{mn}]_y \{C_n\}' + T_m \quad (6)$$

$$\text{境界条件の表示: } [B_{mn}]_y \{C_n\}' = T_m' \quad (7)$$

となる。これらより未定数  $C_n$  が決定されるので次式より一般変位や応力が求められる。

$$\text{変位ベクトル: } \mathbb{U}_i = \sum \frac{(1+\nu)a}{E\lambda} \begin{bmatrix} \sin \lambda \rho, & \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin \lambda \rho - \lambda \rho \cos \lambda \rho \\ -\cos \lambda \rho, & \frac{2}{1+\nu} \cos \lambda \rho - \lambda \rho \sin \lambda \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda \sin \lambda \\ \cos \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{a}, & \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{a} \\ \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{a}, & \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{a} \end{bmatrix} C_n + \frac{T}{E} \begin{bmatrix} -\nu x \\ y \\ a \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{応力ベクトル: } \mathbb{V}_i = \sum \begin{bmatrix} \cos \lambda \rho, & \lambda \rho \sin \lambda \rho \\ -\cos \lambda \rho, & 2 \cos \lambda \rho - \lambda \rho \sin \lambda \rho \\ \sin \lambda \rho, & -\sin \lambda \rho - \lambda \rho \cos \lambda \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda \sin \lambda \\ \cos \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{a}, & \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{a} \\ \operatorname{sh} \frac{\lambda y}{a}, & \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{a} \end{bmatrix} C_n + T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

である。

### 5. 数値計算例

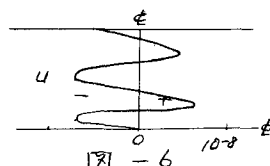
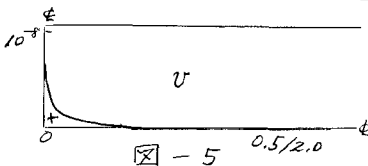
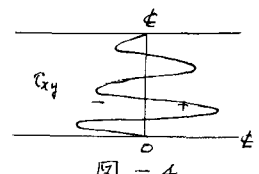
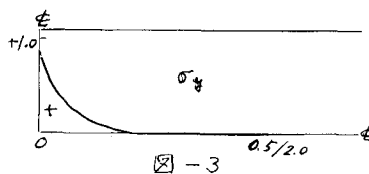
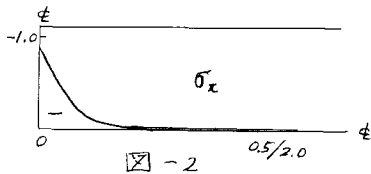
$$E_1 = E_2 = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \nu_1 = 0.0, \nu_2 = 0.3, \quad a : b = 1 : 2 \quad T = \text{単位荷重}$$

#### 固有値

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2.106196 + i1.125364, & \lambda_2 &= 5.356269 + i1.551574, & \lambda_3 &= 8.536682 + i1.775544 \\ \lambda_4 &= 11.69918 + i1.929404, & \lambda_5 &= 14.85406 + i2.046852, & \lambda_6 &= 18.00493 + i2.141891 \\ \lambda_7 &= 21.15341 + i2.221723, & \lambda_8 &= 24.30034 + i2.290552, & \lambda_9 &= 27.44620 + i2.046852 \\ \lambda_{10} &= 30.59130 + i2.405013 \end{aligned}$$

#### 未定数前半の部

$$\begin{aligned} C_{11} &= -0.10108E-03 - i0.26429E-04 & C'_{11} &= -0.10091E-03 - i0.26424E-04 \\ C_{21} &= -0.52429E-07 + i0.39736E-07 & C'_{21} &= -0.52435E-07 + i0.39759E-07 \\ C_{31} &= -0.34521E-10 + i0.63713E-10 & C'_{31} &= -0.34524E-10 + i0.63722E-10 \\ C_{41} &= 0.80592E-14 + i0.10016E-12 & C'_{41} &= 0.80572E-14 + i0.10016E-12 \\ C_{51} &= -0.16747E-14 + i0.10301E-14 & C'_{51} &= -0.16742E-14 + i0.10301E-14 \end{aligned}$$



大学院生、滝本幸夫君と山下裕章君との研究協力者として援助して貰っていることとを附記し、謝意を表す。この計算は信州大学データステーションを経由して東大大型計算機センターのHITA C8800/8700を利用した。