I-124　固有関数法による面内応力解析

信州大学　正員　谷本勉之助
信州大学　正員　夏目正太郎
信州大学　学生員　○山下裕章

1. まえがき

矩形板の面内応力解析を固有関数法で行なう。固有関数法は複素量を用いることにより、未定定数と境界条件より得られる式数が、過不足なく対応し、解が得られる。境界条件処理は、第一境界条件については、すべて固有値方程式に納められ、固有値によって第一境界条件を満足に表現することができる。第二境界条件については、固有関数を級数展開し、処理する。混合境界値問題の場合、Ａｉｒｙの応力関数を用いるよりも、Ｍａｒｇｕｅｒｒｅの変位関数を用いて解析を行なった方が適切であると考えられるので、本論文では、Marguerreの変位関数によって解析を進める。

2. 基礎式

変位関数 χ は

$$\nabla^4 \chi = 0 , \qquad (1)$$

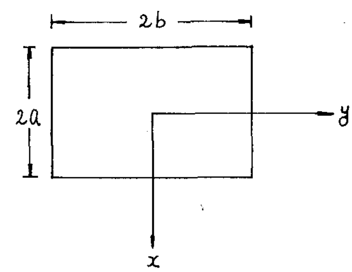
を満足する。

変位関数χを用いると、変位成分 (u, v) は

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{2}{1-\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \chi , \qquad (2)$$

で表わされる。(1)の解として、変位関数χを

$$\chi = \chi_h + \chi_p , \qquad (3)$$



図－1

で与える。ここで χ_h は

$$\chi_h = -\frac{1-\nu}{1+\nu}\sum_n \frac{a^2}{\lambda^2}\left[\cos\lambda\rho,\ \sin\lambda\rho,\ \lambda\rho\cos\lambda\rho,\ \lambda\rho\sin\lambda\rho\right] N \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\dfrac{\lambda y}{a} \\ \mathrm{sh}\,\dfrac{\lambda y}{a} \end{bmatrix} , \qquad N = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} , \qquad (4)$$

$$\rho = \frac{x}{a} ,\ -1 < \rho < 1 ,$$

λ；パラメータ n に対応した未定複素定数，N：複素固有マトリックス（未定積分定数），

χ_p は、第一境界条件の荷重 $P(x)$ による特解である。

3. 第一境界条件

第一境界条件は

i)　$x = -a$；自由端，$x = +a$；自由端，　(5-a)

ii)　$x = -a$；固定端，$x = +a$；固定端，　(5-b)

iii)　$x = -a$；自由端，$x = +a$；固定端，　(5-c)

の3通りがあり、それぞれの境界条件を満足する固有値方程式は

$$\text{i)} \qquad 2\lambda \pm \sin 2\lambda = 0, \tag{6-a}$$

$$\text{ii)} \qquad 2\lambda \mp \frac{3-\nu}{1+\nu}\sin 2\lambda = 0, \tag{6-b}$$

$$\text{iii)} \qquad (2\lambda)^2 + \frac{3-\nu}{1+\nu}\sin^2 2\lambda - \frac{4}{(1+\nu)^2} = 0, \tag{6-c}$$

である。第一境界条件を処理した後の変位，一般力は

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{E\lambda}{(1+\nu)a} \\ \frac{E\lambda}{(1+\nu)a} \\ \frac{E\lambda}{(1+\nu)a} \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} -\sin\lambda\rho, & \cos\lambda\rho, & \cos\lambda\rho-\lambda\rho\sin\lambda\rho, & \sin\lambda\rho+\lambda\rho\cos\lambda\rho \\ \cos\lambda\rho, & \sin\lambda\rho, & \frac{4}{1+\nu}\sin\lambda\rho+\lambda\rho\cos\lambda\rho, & -\frac{4}{1+\nu}\cos\lambda\rho+\lambda\rho\sin\lambda\rho \\ -\cos\lambda\rho, & -\sin\lambda\rho, & -\frac{2}{1+\nu}\sin\lambda\rho-\lambda\rho\cos\lambda\rho, & \frac{2}{1+\nu}\cos\lambda\rho-\lambda\rho\sin\lambda\rho \\ \cos\lambda\rho, & \sin\lambda\rho, & 2\frac{2+\nu}{1+\nu}\sin\lambda\rho+\lambda\rho\cos\lambda\rho, & -2\frac{2+\nu}{1+\nu}\cos\lambda\rho+\lambda\rho\sin\lambda\rho \\ -\sin\lambda\rho, & \cos\lambda\rho, & \frac{3+\nu}{1+\nu}\cos\lambda\rho-\lambda\rho\sin\lambda\rho, & \frac{3+\nu}{1+\nu}\sin\lambda\rho+\lambda\rho\cos\lambda\rho \end{bmatrix}_n \mathbb{P}(\lambda)\cdot \begin{bmatrix} \mathrm{sh}\frac{\lambda y}{a}, & \mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a} \\ \mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a}, & \mathrm{sh}\frac{\lambda y}{a} \\ \mathrm{sh}\frac{\lambda y}{a}, & \mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a} \\ \mathrm{sh}\frac{\lambda y}{a}, & \mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a} \\ \mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a}, & \mathrm{sh}\frac{\lambda y}{a} \end{bmatrix}_n \mathbb{F}_n + \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_p,$$

$$= \sum_n \mathbb{X}(\rho)\cdot\mathbb{Y}(y)\mathbb{F}_n + \mathbb{W}_p, \tag{7}$$

ここで，$\mathbb{P}(\lambda)$は，各種境界条件によって異なる"境界マトリックス"である。$\mathbb{P}(\lambda)$の大きさは(4×2)，$\mathbb{F}_n$は(2×1)である。$[\;]^D$は対角マトリックスである。

4．第二境界条件

第二境界条件からは，4本の式が考えられるから，共役固有値を用いることにより，系の自由度と境界条件式が唯一に対応し，解が定まる。$\mathbb{W}$をρについて，直交関数列のフーリエ級数展開すると，

$$\mathbb{W} = \sum_m\Big[\sum_n\big[\,a_{mn}\cdot\mathbb{Y}(y)\big]\mathbb{F}_n + f_m\Big]\cos m\pi\rho + \sum_m\Big[\sum_n\big[\,a'_{mn}\cdot\mathbb{Y}(y)\big]\mathbb{F}_n + f'_m\Big]\sin m\pi\rho$$

$$= \sum_m\Big[\sum_n\big[\,\mathbb{A}_{mn}\big]\mathbb{F}_n + f_m\Big]\cos m\pi\rho + \sum_m\Big[\sum_n\big[\,\mathbb{A}'_{mn}\big]\mathbb{F}_n + f'_m\Big]\sin m\pi\rho \tag{8}$$

ここで，a_{mn}，a'_{mn}，f_m，f'_m は，フーリエ定数である。$\mathbb{A}_{mn}$，$\mathbb{A}'_{mn}$の大きさは(4m×4n)

$y=\pm b$端での第二境界条件に，必要な物理量をとり出して，多元連立方程式を作ると，

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{mn}, & \overline{\mathbb{A}}_{mn} \\ \mathbb{A}'_{mn}, & \overline{\mathbb{A}}'_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{F} \\ \overline{\mathbb{F}} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} f_m \\ f'_m \end{bmatrix} = 0, \tag{9}$$

ここで，$\overline{\mathbb{A}}$，$\overline{\mathbb{A}}'$はそれぞれ$\mathbb{A}$，$\mathbb{A}'$の共役値，$\overline{\mathbb{F}}$も$\mathbb{F}$の共役値。

従って，この多元連立方程式を解くと，第二境界条件を満足する解が得られる。よって，この決定された$\mathbb{F}_n$，$\overline{\mathbb{F}}_n$を，式(7)に代入することにより，四辺の境界条件を満足する解が得られる。

5．あとがき

この解析によれば，支持状態が不安定とならないかぎり，任意の境界条件の組み合わせが可能である。なお，この解析による数値計算例は，当日に発表する予定である。

(参考文献)

1．島田俊樹，谷本勉之助，夏目正太郎「固有関数法による板の面内応力解析」第26回年次学術講演会概要集

2．Marguerre, K., "Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie" ZAMM, 13, 6, p.437, 1933.