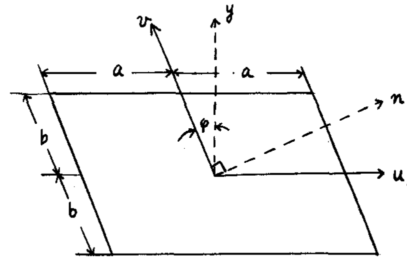
I-123　固有関数法による平行四辺形板の曲げ

信州大学　学生員　○滝本幸夫
正員　谷本勉之助
正員　夏目正太郎

1. まえがき

等方性の平行四辺形板の曲げ解析において、有限要素法，階差法等の近似解法によって多くの研究がなされているが、ここでは、Papkovitsh－Fadle によって提案された固有関数法による厳密解法を以下に示す。固有関数法についての研究において、固有関数などの取り扱いについて、種々の方法論が適用されているが、我々の研究グループでは、固有関数の展開系列として、Fourier 級数とルジャンドル多項式による展開の二つの方法を用いて、双方の比較を行なってきている。



図－1

等分布荷重を受けた周辺固定の平行四辺形板の曲げについてはすでに扱っているが[1]、矩形板の曲げと同様に[2]、さらに発展したものとして、境界条件は対向二辺、固定－固定，固定－単純支持，固定－自由で、他の対向二辺については任意の条件の問題をここで扱う。

2. 解法

図－1 に示されたような斜交座標系（u, v）を用いると、板の曲げの基礎微分方程式は、

$$\frac{\partial^4 w}{\partial u^4} + 4\sin\varphi\frac{\partial^4 w}{\partial u^3\partial v} + 2(1+2\sin^2\varphi)\frac{\partial^4 w}{\partial u^2\partial v^2} + 4\sin\varphi\frac{\partial^4 w}{\partial u\partial v^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = \cos^4\varphi\,\frac{g}{D} \qquad (1)$$

と表わすことができる。ここで、gは荷重強度，φは傾斜角である。式(1)のたわみ w を次の形で表わす。

$$w = w_h + w_p \qquad (2)$$

ここで、w_hは同次解、w_pは特解である。

w_pは、三つの場合について、次の境界条件式　$(\rho = u/a)$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ \theta_n \end{bmatrix}_{\rho=-1} \\ \begin{bmatrix} w \\ \theta_n \end{bmatrix}_{\rho=1}\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ \theta_n \end{bmatrix}_{\rho=\mp1} \\ \begin{bmatrix} w \\ M_n \end{bmatrix}_{\rho=\pm1}\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ \theta_n \end{bmatrix}_{\rho=\mp1} \\ \begin{bmatrix} M_n \\ V_n \end{bmatrix}_{\rho=\pm1}\end{bmatrix} = 0 \qquad (3)$$

と、式(1)を満足する多項式の形で表現する。添字nは、図－1で示されたように、v軸と直角の方向を表わしている。結局、

$$w_p = (g a^4\cos^4\varphi/24D)(1-\rho^2)^2 \qquad (4a)$$

$$w_p = (g a^4\cos^4\varphi/24D)(2\pm\rho-3\rho^2\mp\rho^3+\rho^4) \qquad (4b)$$

$$w_p = (g a^4\cos^4\varphi/24D)(17\pm28\rho+6\rho^2\mp4\rho^3+\rho^4) \qquad (4c)$$

と表わすことができる。ここで、a. 固定－固定，b. 固定－単純支持，c. 固定－自由の場合を示し、二重符

号は、上が $\rho=-1$ で固定の場合, 下が $\rho=1$ で固定の場合を示している。

次に、同次解 ω_h を求めると、

$$\omega_h = \lfloor \cos\lambda k\rho,\ \cos\mu k\rho,\ k\rho\sin\lambda k\rho,\ k\rho\sin\mu k\rho \rfloor \left(\mathbb{N}_1 ch\frac{kv}{a} + \mathbb{N}_2 sh\frac{kv}{a}\right) + i\lfloor \sin\lambda k\rho,\ -\sin\mu k\rho,\ -k\rho\cos\mu k\rho,\ k\rho\cos\mu k\rho \rfloor \left(\mathbb{N}_1 sh\frac{kv}{a} + \mathbb{N}_2 ch\frac{kv}{a}\right) \tag{5}$$

ここで, $\lambda=e^{i\varphi}$, $\mu=e^{-i\varphi}$, k は ω_h に関する境界条件式(3)から導びかれる固有値方程式によって決められるパラメーターで、一般に複素量である。また、$\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$ は、4×1 の複素未定常数である。固有値方程式は、三つの場合について, 以下のようになる。

$$(\sigma k)^2 - (\sin\sigma k)^2 = 0 \tag{6a}$$

$$2\sigma k - \sin 2\sigma k = 0 \tag{6b}$$

$$(\sigma k)^2 - \{2/(1-\nu)\}^2\cos^2\sigma k - \{(1+\nu)/(1-\nu)\}^2\sin^2\sigma k = 0 \tag{6c}$$

ここで, a, b, c は、式(4)と同様の境界条件に対するものであり、$\sigma=2\cos\varphi$ である。これらの固有値方程式は、無限の根を有し、矩形板の固有値方程式とパラメータ σ を除けば同一なものなので、簡単な計算より、矩形板の固有値から求めることができる。また当然のことであるが、$\varphi=0°$ とおけば、矩形板の固有方程式と一致する。Kは複素数であるが、α, β を正の実数とすると、$K=\alpha+\beta i$ が固有値ならば, $\bar{K}=\alpha-\beta i$, $-K=-\alpha-\beta i$, $-\bar{K}=-\alpha+\beta i$ も固有値になる。しかしながら、式(5)において、マイナスの項はすでに考慮に入れているので、$K, \bar{K}$ について考えればよい。結局、式(5)は次のように変換される。

$$\omega_h = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lfloor \cos\lambda k\rho,\ \cos\mu k\rho,\ k\rho\sin\lambda k\rho,\ k\rho\sin\mu k\rho \rfloor_n \left(\mathbb{B}_{1,n} ch\frac{kv}{a} + \mathbb{B}_{2,n} sh\frac{kv}{a}\right) + i\lfloor \sin\lambda k\rho,\ -\sin\mu k\rho,\ -k\rho\cos\mu k\rho,\ k\rho\cos\mu k\rho \rfloor_n \left(\mathbb{B}_{1,n} sh\frac{kv}{a} + \mathbb{B}_{2,n} ch\frac{kv}{a}\right)\right]\mathbb{A}_n + \text{Conjugate} \tag{7}$$

ここで, $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ は 4×2 の行列であり, 三つの場合について個々に求めることができる。$\mathbb{A}_n$ は 2×1 の複素未定常数である。共役固有値に関する項についても同様である。すなわち, 一組の固有値 K_n $\bar{K}_n$ について、4個の複素未定常数があり、以下の計算において、このまま演算を行なうことも可能であり、また、実数化をしてから演算を行なうことも可能である。これらの未定常数は、残りの境界条件によって決定される。そのために, $v=\pm b$ で式(7)の ω_h と式(4)の ω_p を直交関数系によって展開を行なう。ここでは, Fourier級数とルジャンドル多項式による展開の二つの方法を用いる。すなわち,

$$\omega_h = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\ a_{mn}\mathbb{A}_n + \bar{a}_{mn}\bar{\mathbb{A}}_n\ \right] X_m(\rho) \tag{8a}$$

$$\omega_p = \sum_{m=1}^{\infty} f_m\ X_m(\rho) \tag{8b}$$

ここで、a_{mn}, $\bar{a}_{mn}$, f_m は、展開係数であり、$X(\rho)$ は直交関数系である。上式を用いて、未定常数が決定されうる。

3、あとがき

本文の数値結果は, 講演の際に発表し、また、他の解析方法との数値比較を行なう予定である。なお, 数値計算は 東大のHITAC 8800/8700 を使用した。

（参考文献）

1）谷本,夏目,島田 "固有関数法による平行四辺形板の解析" 土木学会第27回年次学術講演会概要集

2）滝本,谷本,夏目 "固有関数法による各種支持の矩形板の曲げ" 土木学会第29回年次学術講演会概要集