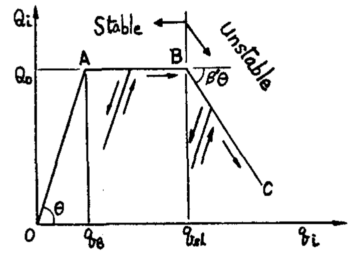
I-122　材料の塑性変形能が平板の曲げ耐力に与える影響について

大阪市立大学　工学部　正員　倉田宗章
大阪市立大学　工学部　正員　園田恵一郎
大阪市立大学　工学部　学生員○坂口修司

極限設計法(塑性設計法)においては、使用材料または構造要素は弾-完全塑性体であり、弾性限界後は応力の再配分に必要な塑性変形を起こし、構造の全体または一部が運動学的許容なメカニズムになるまで荷重は増大し続けると仮定されている。しかし、コンクリート、岩石、土(密な砂や過圧密粘土)などの材料では、応力・ひずみ曲線の一部に降下領域を持つし，圧縮を受ける金属棒，板，殻においても，局部座屈発生後は構造要素としての力と変形の間に同様な不安定領域を持つ。このような不安定材料(Unstable Material)や不安定構造要素を持つ構造物に極限設計法を適用することができるかどうかは興味ある問題である。この種の問題の一つに鉄筋コンクリートはりの塑性ヒンジにおける回転容量の問題がある。これに関して、A.L.L.Baker[1]は塑性ヒンジの回転量をある制限内にして、はりを塑性設計することができることを示した。同様の方法は鉄筋コンクリート床板の問題にも適用できるものと思われる。

本研究では、曲げを受ける鉄筋コンクリート床板に対して，コンクリートの圧縮塑性変形能が終局荷重にどのように影響するかを調査した。塑性逸散エネルギー率を $\dot{D}$ とすれば、$\dot{D}=\int_A CQ\dot{q}\,dA$ ———(1) ここに C は正のスカラー関数，Q, $\dot{q}$ は一般化した応力とひずみ増分であり，平板の曲げ問題に対しては，$C=1$，$Q=(M_1,M_2)$，$\dot{q}=(\dot{K}_1,\dot{K}_2)$ ここに $M_1,M_2,\dot{K}_1,\dot{K}_2$ は主モーメントと主曲率増分である。図·1 の Q_i-q_i 曲線のように加工軟化(Work Softening)領域を持つ材料または構造要素に対して，A.C.Palmer[2]らは，「1サイクルの応力経路またはひずみ経路によって成す仕事は非負である」ことにより、安定材料に対して Drucker[3] が示した降伏曲面の凸性および塑性ひずみ増分ベクトルの直交性がなお成立することを指摘した。2次元，3次元応力問題では，図1の一軸応力·ひずみ関係に対応した降伏曲面の形状，塑性関係式を定義しなければならない。鉄筋コンクリート床板の降伏条件式として Johansen の式を採用し，2軸曲げ圧縮を受けるコンクリートは Mohr 理論によるせん断破壊に従うものとすれば，軟化領域での降伏曲面の変化は図·2のように想定できる。ここでは軸対称荷重を受ける円板を対象とすれば，　$\max\{|M_r|-M_{r0}(e_r),\ |M_\theta|-M_{\theta 0}(e_\theta)\}=0$ ——— (2)　図·1 に示すような直線的な軟化特性を仮定すれば，周知の塑性流動理論より、



図·1　応力·ひずみ曲線

$$\left.\begin{aligned}\dot{M}_r&=D(\dot{K}_r+\nu\dot{K}_\theta)-D\,d\mu_r\left(\frac{\partial F_r}{\partial M_r}+\nu\frac{\partial F_\theta}{\partial M_\theta}\right)\\ \dot{M}_\theta&=D(\dot{K}_\theta+\nu\dot{K}_r)-D\,d\mu_\theta\left(\frac{\partial F_\theta}{\partial M_\theta}+\nu\frac{\partial F_r}{\partial M_r}\right)\end{aligned}\right\}\quad\text{———}\ (3)$$

ここに，$F_r=|M_r|-M_{r0}(e_r)$，$F_\theta=|M_\theta|-M_{\theta 0}(e_\theta)$，$e_r=d\mu_r$，$e_\theta=d\mu_\theta$，　図·2 の降伏曲面の角点，A, A′, A″ に対しては，

$$d\mu_r=\frac{1}{\{(1-\beta_r)(1-\beta_\theta)-\nu^2\}}\{(1-\beta_\theta-\nu^2)\dot{K}_r-\nu\beta_\theta\dot{K}_\theta\},\quad d\mu_\theta=\frac{1}{\{(1-\beta_r)(1-\beta_\theta)-\nu^2\}}\{-\nu\beta_r\dot{K}_r+(1-\beta_r-\nu^2)\dot{K}_\theta\}$$

また辺 AB, A′B′, A″B″ に対しては，式(3)の $F_r=0$ で $d\mu_r=d\mu_\theta=\frac{1}{1-\beta_\theta}(\dot{K}_\theta+\nu\dot{K}_r)$，辺 AC, A′C′, A″C″ に対しては，式(3)の $F_\theta=0$ で $d\mu_r=d\mu_\theta=\frac{1}{1-\beta_r}(\dot{K}_r+\nu\dot{K}_\theta)$ である。

いま，$d\mu_r=\varphi_{11}\dot{K}_r+\varphi_{12}\dot{K}_\theta$，$d\mu_\theta=\varphi_{21}\dot{K}_r+\varphi_{22}\dot{K}_\theta$ と表示し，式(3)に代入すれば，

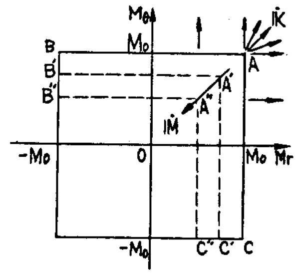
$$\left.\begin{Bmatrix}\dot{M}_r\\ \dot{M}_\theta\end{Bmatrix}=D\begin{pmatrix}1,&\nu\\ \nu,&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{K}_r\\ \dot{K}_\theta\end{Bmatrix}-D\begin{pmatrix}\varphi_{11}\psi_a,&\varphi_{12}\psi_a\\ \varphi_{21}\psi_b,&\varphi_{22}\psi_b\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{K}_r\\ \dot{K}_\theta\end{Bmatrix},\qquad \begin{aligned}\psi_a&=\frac{\partial F_r}{\partial M_r}+\nu\frac{\partial F_\theta}{\partial M_\theta}\\ \psi_b&=\frac{\partial F_\theta}{\partial M_\theta}+\nu\frac{\partial F_r}{\partial M_r}\end{aligned}\right\}\quad\text{———}\ (4)$$

式(4)を円板のつり合い方程式；$\frac{\partial^2\dot{M}_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(2\dot{M}_r-\dot{M}_\theta)=-\dot{p}(r)$　に代入すれば，荷重増分 $\dot{p}(r)$ または

変位増分$\dot{w}(r)$に関する基礎方程式を得る。

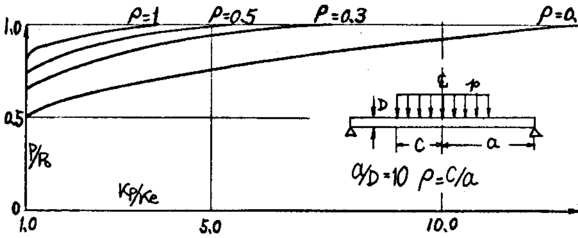
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\dot{w}=\frac{\dot{p}}{D}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\varphi_{11}\psi_a\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2}+\varphi_{12}\psi_a\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}\right]$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(2\varphi_{11}\psi_a-\varphi_{21}\psi_b)\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2}+(2\varphi_{12}\psi_a-\varphi_{22}\psi_b)\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}\right] \qquad (5)$$

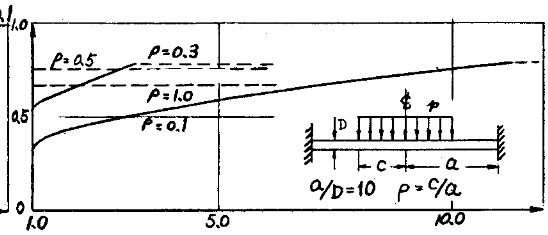
式(5)の数値解析法は文献(4)を参照されたい。
以下に各種の塑性変形能を持つ円板の終局荷重を示す。



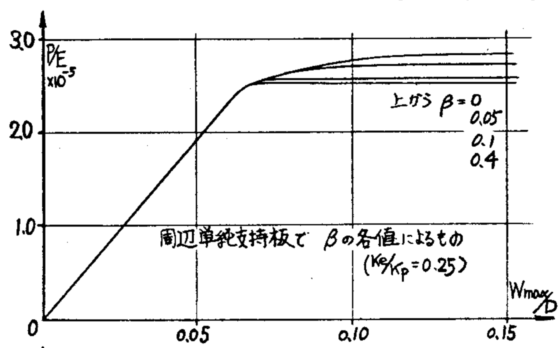
図·2

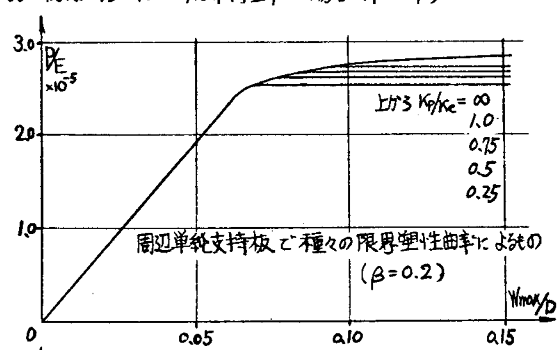
下図は図·1の$\beta'=\infty$の場合, P_0は理想弾完全塑性体に対する終局荷重, K_eは弾性限界曲率, K_pは限界塑性曲率である。

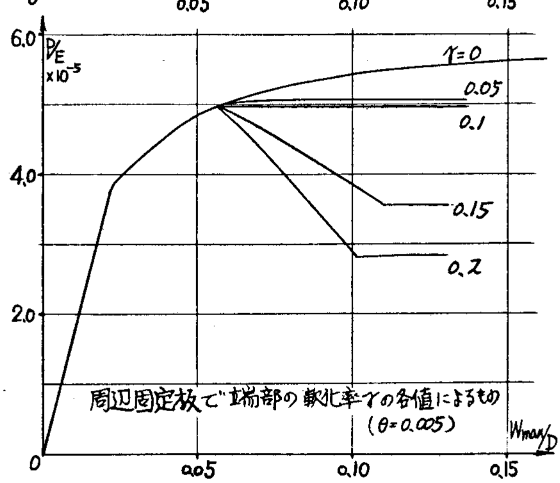


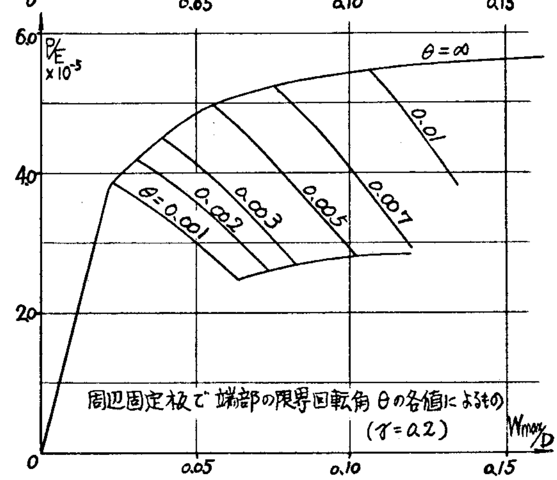


下図は種々のパラメーターを持つ円板の荷重-最大たわみ曲線である。例は$a/D=10$ 等分布荷重pの場合($P=\pi p$)









引用文献(1) Jour. I.C.E, Vol.35, No.4, Feb. pp 262-298
(2) Jour. App. Mech. Vol.34, June 1967, pp 464-470
(3) Proc. 1st. U.S. National Congress of Appl. Mech. 1951, pp487-491
(4) 大阪市立大学 工学部 紀要 Vol.15, 1974, pp111-120

(注) $\beta=\dfrac{\beta'}{1+\beta'}$