

大阪市立大学 正員 倉田 宗章
 大阪市立大学の正員 塚川 郁志雄

1. はしがき; 著者らは、三次元弾性論に基づく厚板理論を展開し、2,3の数値計算例を発表した¹⁾。一方、三次元直交異方弾性体の解析については²⁾次のようなものがある。S.G. Lekhnitskyが等方弾性体におけるLoveのひずみ関数と類似した重調和関数を誘導している。E.A. ElliotはNeuber-Tapkovitchと類似した2つの独立な調和関数を用いて解析を行い、W.T. Chenは、非軸対称の問題にも適用出来るように、さらにもう一つの調和関数を用いて解析している。³⁾又岡村等は、等方弾性体との剛性の偏り量が等方弾性体に作用するBody-Forceの1種と考えて、直交異方弾性体を数値的に解析している。

本研究においては、三次元直交異方弾性体の厚板理論を展開し、等方弾性体の厚板理論による結果を、2,3の数値計算例をもとにして比較するものである。

2. 理論式;

板の中央面内にx, y軸, 下方にz軸をとる。z軸方向のみのヤング率, ポアソン比のみが, x, y軸方向のものと異なる場合のHookeの法則は、次のような式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{xy} &= \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{yz} &= \mu' \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_z &= \lambda' \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{zx} &= \mu' \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$; Lamé's Constants.

式(1)を応力の釣合式に代入すると、次のような式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot u + B_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= 0 \\ B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot v + B_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} &= 0 \\ B_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + B_{13} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + (B_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-1,2,3)$$

ここで、 $B_{11} = \lambda + 2\mu, B_{33} = \lambda' + 2\mu', B_{44} = \mu', B_{66} = \mu, B_{12} = \lambda + \mu, B_{13} = \lambda' + \mu'$

今、変位 u, v, w を次式で示されるような F を導入する。

$$u = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad v = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, \quad w = \frac{B_{11}}{B_{33}} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{B_{44}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F \quad (3)$$

式(3)を式(2-3)に代入すると、 F に関する式が得られる。

$$\left[B_{11} B_{44} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (B_{44}^2 + B_{11} B_{33} - B_{13}^2) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} + B_{33} B_{44} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \cdot F = 0 \quad (4)$$

式(4)を簡略化すると、次のように置き換えられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F = 0 \quad (5)$$

ここで $S_1^2 = (a + \sqrt{a^2 - 4b})/2b, S_2^2 = (a - \sqrt{a^2 - 4b})/2b$

$a = (B_{44}^2 + B_{11} B_{33} - B_{13}^2)/(B_{11} B_{44}), b = B_{33}/B_{11}$

一方、さらに次のような関数 φ を導入する。

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad w = 0 \quad (6)$$

式(6)を式(2-1)又は式(2-2)に代入すると、 φ に関する式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{S_3^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \varphi = 0 \quad \therefore \tau: S_3^2 = (B_{33}/B_{44})^2 \quad (7)$$

以上より、変位 u, v, w と関数 F, φ との関係式は、次のように示される。

$$u = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad w = \frac{B_{11}}{B_{33}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{B_{44}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F \quad (8)$$

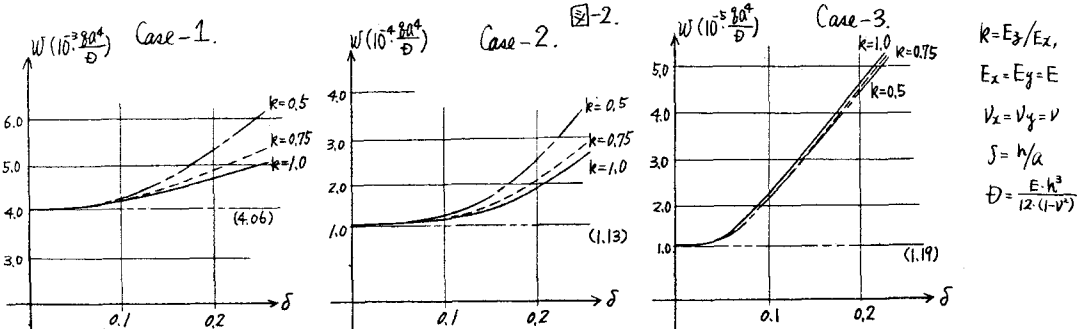
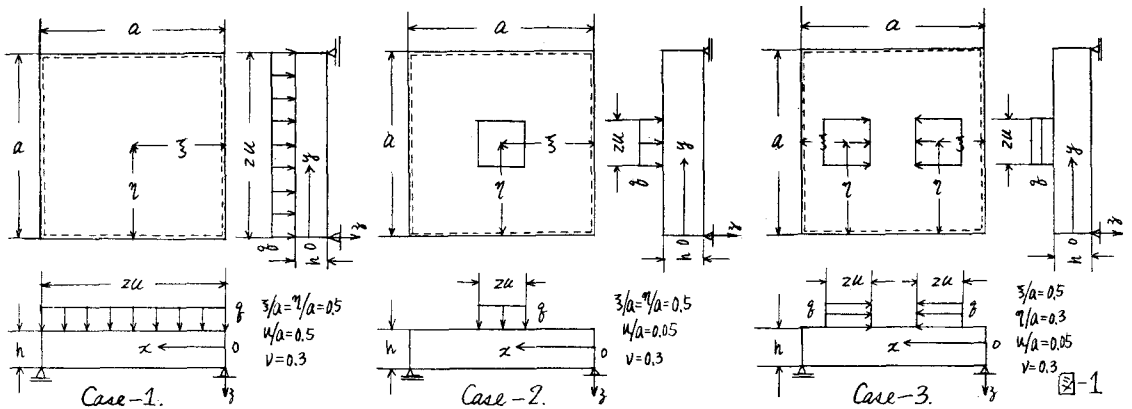
今、 $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$ と仮定すれば、式(8), (5), (7) は次のように示される。

$$u = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad w = 2 \cdot (1-\nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (9)$$

$$\Delta \Delta F = 0, \quad \Delta \varphi = 0 \quad \therefore \tau: \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (10)$$

式(10)は、等方弾性体における Galerkin-vector と Boussinesq の関数にそれぞれ一致している。

3. 数値計算例; 図-1 に示されるような3つの荷重状態を考慮。計算結果を図-2 に示す。ただし、たわみ w は板の上面 ($z = -h/2$) のもので、座標位置は $x/a = 0.5, y/a = 0.5$ である。



$$\begin{aligned} k &= E_z/E_x, \\ E_x &= E_y = E \\ \nu_x &= \nu_y = \nu \\ \delta &= h/a \\ D &= \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned}$$

4. あとがき; 上記3つの計算結果を考察すると、鉛直荷重の場合の方が、 k の変化がたわみ w におよぼす影響は顕著であると思われる。

1) 倉田, 堀川, 才28, 29回年次学術講演会. 2) R.A. Eubanks and E. Sternberg, "On the Axisymmetric Problems of Elasticity Theory for a Medium with Transverse Isotropy." Jour. Rat. Mech and Analy., Vol. 3, 3) W.T. Chen, "On some Problems in Transversely Isotropic Elastic Materials." J. A. M., June, 1966 4) 岡村, 島田, 森, 才29回年次学術講演会.