I-107　拘束ひび割れをモデル化したスラブの曲げについて

北海道大学　正員　能町 純雄
〃　〃　角田与史雄
〃　〃　○堺 孝司

1. まえがき　硬化収縮，乾燥収縮等の拘束の影響によってスラブに貫通ひび割れが生じている場合でも，鉄筋によって力の相互伝達が行なわれている。この伝達機構は非常に複雑であり，これらを解析によって定量的に把えるには困難な要因が多過ぎる。しかし，著者らは相互伝達力に及ぼす鉄筋の影響を貫通ひび割れ断面におけるバネ定数の導入によってモデル化することを試みた。すなわち，対応する力学的モデルを解析的に解き，実験によりそのバネ定数の概略値を得，更に，貫通ひび割れの境界条件を想定した事による曲げ応力の変化状況を調べようとしたものである。尚，当然，鉄筋にはそれ自身で曲げ耐荷力を有しているがこれを無視して，版の境界に生じるせん断力のみをバネを介して伝達するものとした。又，解析の便宜のため，貫通ひび割れは，境界に平行に生ずる場合を取扱った。

2. モデルの解析　有限フーリエ変換を用いた重調和微分式のGreenの積分を媒介とすれば簡単に矩形平板の一般解を求めることが出来ることは良く知られている。これを図.1に示す様な矩形平板に適用すれば，Wの重調和微分式に対するGreenの積分は，次の様に書くことができる。

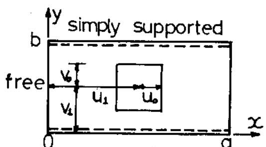


Fig.1

$$\int_0^a\int_0^b \{(\Delta^2 W)\cdot u-(\Delta^2 U)\cdot W\}\,dx\,dy = R(W\cdot u)^* \quad \text{———} (1)$$

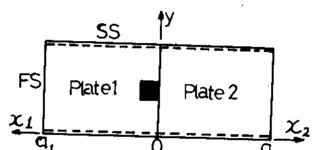


Fig.2

図.1の境界条件を考慮したたわみWは，

$$W=\frac{ga^4}{D}\sum_n R_n(u_0 u_1 \xi)\cdot\sin\frac{n\pi v_1}{b}\sin\frac{n\pi v_0}{b}\sin n\pi\eta$$

$$+\frac{1}{b}\sum_n[2G_{n,\xi}+(1-\nu)H_{n,\xi}]\cdot S_n[W_{x=a}]\sin n\pi\eta+\frac{1}{b}\sum_n[2G_{n,1-\xi}+(1-\nu)H_{n,1-\xi}]\cdot S_n[W_{x=0}]\sin n\pi\eta \quad \text{———} (2)$$

ここで

$$R_n(u_0u_1\xi)=\frac{a}{b}\frac{4}{\pi^3}\frac{1}{\alpha_n}\left[-A_n^{(1)}-\left\{\begin{matrix}A_n^{(2)}\\-B_n^{(2)}\end{matrix}\right\}+A_n^{(3)}+\left\{\begin{matrix}A_n^{(4)}\\-B_n^{(4)}\end{matrix}\right\}\right],\quad S_n[W_{x=a}]=\int_0^a W_{x=a}\sin\frac{n\pi x}{a}dx,\quad S_n[W_{x=0}]=\int_0^a W_{x=0}\sin\frac{n\pi x}{a}dx,$$

$$A_n^{(1)}=\sum_m S_{mn}\sin m\pi(\xi+\alpha),\quad A_n^{(2)}=\sum_m S_{mn}\sin m\pi(\xi-\alpha),\quad A_n^{(3)}=\sum_m S_{mn}\sin m\pi(\xi+\beta),\quad A_n^{(4)}=\sum_m S_{mn}\sin m\pi(\xi-\beta),$$

$$B_n^{(2)}=\sum_m S_{mn}\sin m\pi(\alpha-\xi),\quad B_n^{(4)}=\sum_m S_{mn}\sin m\pi(\beta-\xi),\quad S_{mn}=1/m(m^2+\alpha_n^2)^2,\quad \alpha_n=an/b,\quad \alpha=(u_0+u_1)/a,$$

$$\beta=(u_0-u_1)/a,\quad \xi=x/a,\quad \eta=y/b,\quad G_{n,\xi}=[\mathrm{ch}\,\pi\alpha_n(1+\xi)-\mathrm{ch}\,\pi\alpha_n(1-\xi)]/(\mathrm{ch}\,2\pi\alpha_n-1),$$

$$H_{n,\xi}=\pi\alpha_n\{(1-\xi)\mathrm{sh}\,\pi\alpha_n(1+\xi)-(1+\xi)\mathrm{sh}\,\pi\alpha_n(1-\xi)\}/(\mathrm{ch}\,2\pi\alpha_n-1)$$

さて，式(2)で得られたたわみと反力Rに，図.2に示す様にsuffix 1,2を添えて，$x_1=x_2=0$ における境界条件

$$\text{i)}\ (R_1)_{x_1=a_1}=0 \qquad \text{ii)}\ (R_2)_{x_2=a_2}=0$$

$$\text{iii)}\ [(W_2)_{x_2=0}-(W_1)_{x_1=0}]\cdot K=(R_2)_{x_2=0} \qquad \text{iv)}\ -[(W_2)_{x_2=0}-(W_1)_{x_1=0}]\cdot K=(R_1)_{x_1=0} \quad \text{———} (3)$$

を考慮することによって，未知数 $S_n[W_{x_1=a_1}]$, $S_n[W_{x_1=0}]$, $S_n[W_{x_2=a_2}]$, $S_n[W_{x_2=0}]$ を得る。従って，求めるたわみは

$$W_1=\frac{g_1a_1^4}{D}\sum_n\Big\{R_n(u_0u_1\xi_1)\sin\frac{n\pi v_1}{b}\sin\frac{n\pi v_0}{b}$$

$$-X_1[2G_{n,\xi_1}+(1-\nu)H_{n,\xi_1}]-X_2[2G_{n,1-\xi_1}+(1-\nu)H_{n,1-\xi_1}]\Big\}\sin n\pi\eta \quad \text{———} (4)$$

$$W_2=\frac{g_1a_1^4}{D}\sum_n\Big\{\varepsilon\delta^4R_n(u_0'u_1'\xi_2)\sin\frac{n\pi v_1'}{b}\sin\frac{n\pi v_0'}{b}$$

$$-X_3[2G_{n,\xi_2}+(1-\nu)H_{n,\xi_2}]-X_4[2G_{n,1-\xi_2}+(1-\nu)H_{n,1-\xi_2}]\Big\}\sin n\pi\eta \quad \text{———} (5)$$

ここで　$X = A^{-1}\cdot B$,　$X = [\, X_1\ X_2\ X_3\ X_4 \,]^T$,　$B = [\, \alpha_{11}\ \ \varepsilon\delta^4\alpha_{21}\ \ \beta_{11}\ \ \varepsilon\delta^4\beta_{21} \,]^T$,　$a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = a_{33} = a_{41} = 0$,　$a_{11} = \alpha_{12}$,　$a_{12} = \alpha_{13}$,　$a_{23} = \alpha_{22}$,　$a_{24} = \alpha_{23}$,　$a_{31} = \beta_{12}$,　$a_{32} = -2K_1 + \beta_{13}$,　$a_{34} = 2K_1$,　$a_{42} = 2K_2$,　$a_{43} = \beta_{22}$,　$a_{44} = -2K_2 + \beta_{23}$,　$K_1 = Ka_1^3/D$,　$K_2 = Ka_2^3/D$,　$g_2 = \varepsilon g_1$,　$a_2 = \delta a_1$,

$\alpha_{11} = [-R_n'''(u_0 u_1 \xi_1 = 1) + (2-\nu)(\pi\alpha_{n1})^2 R_n'(u_0 u_1 \xi_1 = 1)] \sin\frac{n\pi v_1}{b} \sin\frac{n\pi v_0}{b}$,　$\alpha_{12} = -[\, 2G'''_{n,\xi_1} + (1-\nu)H'''_{n,\xi_1}]_{\xi_1=1} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n1})^2 [\, 2G'_{n,\xi_1} + (1-\nu)H'_{n,\xi_1}]_{\xi_1=1}$,　$\alpha_{13} = -[\, 2G'''_{n,1-\xi_1} + (1-\nu)H'''_{n,1-\xi_1}]_{\xi_1=1} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n1})^2 [\, 2G'_{n,1-\xi_1} + (1-\nu)H'_{n,1-\xi_1}]_{\xi_1=1}$,

$\alpha_{21} = [-R_n'''(u_0' u_1' \xi_2 = 1) + (2-\nu)(\pi\alpha_{n2})^2 R_n'(u_0' u_1' \xi_2 = 1)] \sin\frac{n\pi v_1'}{b} \sin\frac{n\pi v_0'}{b}$,　$\alpha_{22} = -[\, 2G'''_{n,\xi_2} + (1-\nu)H'''_{n,\xi_2}]_{\xi_2=1} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n2})^2 [\, 2G'_{n,\xi_2} + (1-\nu)H'_{n,\xi_2}]_{\xi_2=1}$,　$\alpha_{23} = -[\, 2G'''_{n,1-\xi_2} + (1-\nu)H'''_{n,1-\xi_2}]_{\xi_2=1} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n2})^2 [\, 2G'_{n,1-\xi_2} + (1-\nu)H'_{n,1-\xi_2}]_{\xi_2=1}$,　$\beta_{11} = [-R_n'''(u_0 u_1 \xi_1 = 0) + (2-\nu)(\pi\alpha_{n1})^2 R_n'(u_0 u_1 \xi_1 = 0)] \sin\frac{n\pi v_1}{b} \sin\frac{n\pi v_0}{b}$,

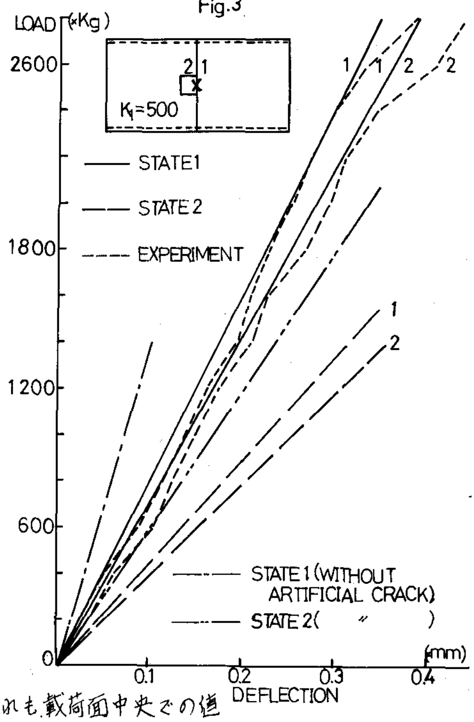
$\beta_{12} = -[\, 2G'''_{n,\xi_1} + (1-\nu)H'''_{n,\xi_1}]_{\xi_1=0} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n1})^2 [\, 2G'_{n,\xi_1} + (1-\nu)H'_{n,\xi_1}]_{\xi_1=0}$,　$\beta_{13} = -[\, 2G'''_{n,1-\xi_1} + (1-\nu)H'''_{n,1-\xi_1}]_{\xi_1=0} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n1})^2 [\, 2G'_{n,1-\xi_1} + (1-\nu)H'_{n,1-\xi_1}]_{\xi_1=0}$,　$\beta_{21} = [-R_n'''(u_0' u_1' \xi_2 = 0) + (2-\nu)(\pi\alpha_{n2})^2 R_n'(u_0' u_1' \xi_2 = 0)] \sin\frac{n\pi v_1'}{b} \sin\frac{n\pi v_0'}{b}$,

$\beta_{22} = -[\, 2G'''_{n,\xi_2} + (1-\nu)H'''_{n,\xi_2}]_{\xi_2=0} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n2})^2 [\, 2G'_{n,\xi_2} + (1-\nu)H'_{n,\xi_2}]_{\xi_2=0}$,　$\beta_{23} = -[\, 2G'''_{n,1-\xi_2} + (1-\nu)H'''_{n,1-\xi_2}]_{\xi_2=0} + (2-\nu)(\pi\alpha_{n2})^2 [\, 2G'_{n,1-\xi_2} + (1-\nu)H'_{n,1-\xi_2}]_{\xi_2=0}$

3. 実験及び数値計算結果

図.2において, $a_1 = a_2 = b = 75cm$, $\varepsilon = 0$, $u_1 = u_0 = 5/75$, $v_1 = 37.5/75$, $v_0 = 5/75$ なる3状態で実験を行なった。その中央点におけるたわみの実験値と状態1,Ⅱにおける解析値との比較を図.3に示す。実験の値は, 支点沈下の補正をしたためスムーズではないが, ほぼ状態Ⅰに相当していると言えるであろう。次に, $\varepsilon = 0$, $u_1 = u_0 = 0.1b$, $v_1 = 0.5b$, $v_0 = 0.1b$ で, x方向単純支持の半無限の板を考え, 貫通ひび割れのある場合の曲げ応力の変化とそれのない場合との比較を図.4,5,6に示す。いずれも載荷面中央での値である。貫通ひび割れの条件を入れるとバネ剛度に応じて荷重分担がなされ, 例えば, $K_1 = 0$, すなわち, 無載荷板の拘束のない場合, $M_y = 0.1816\times10^{-1} qb^2$, $M_x = 0.3635\times10^{-2} qb^2$ となり, K_1 の値が大きくなるにつれて, 一定の値に漸近する。図.7には, 境界におけるたわみと K_1 との関係を示した。尚, 計算には, 北大大型計算機センター FACOM 230-60/75 を使用した。

Fig.3



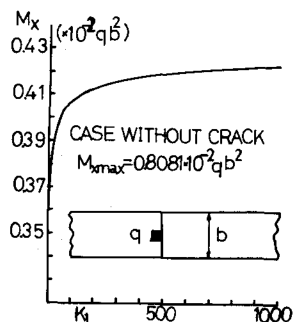


Fig.4

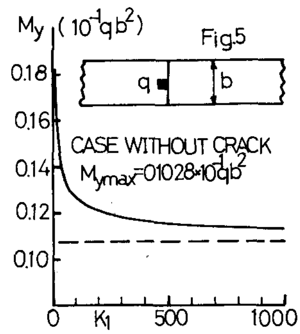
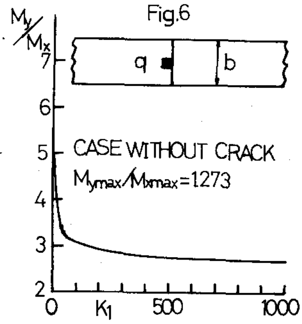


Fig.6



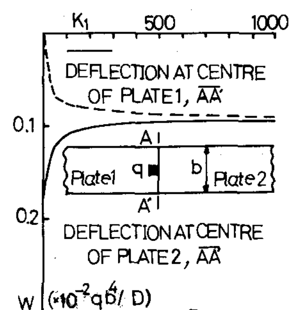


Fig.7

＊ 能町純雄 ; 弾性基礎上にある四辺, 四隅自由な矩形板の曲げについて, 土木学会論文集第32号, 昭.31.3