I-97　移動荷重による半無限体内の変位，応力に関する一考察

北海道大学　正員　芳村 仁
運輸省港湾技研　正員　○中辻 隆

1．まえがき　半無限体上を荷重が移動する時の弾性体内の変位，応力の研究には，二次元問題に対するJ. Cole とJ. Huthによる研究[1]，三次元問題に対するL. Frýbaによる研究[2]，などがある。[5][6] 後者は，二重フーリェ変換による解法であるため，変位，応力を求めるのには二重数値積分を必要とする。ここでは，(1) それを避けるために，荷重からある程度離れるとその影響は無視し得るから，荷重をフーリェ級数に展開することによって表面上を動く集中荷重による変位，応力の挙動を，(2) 正弦波状の移動荷重による挙動，および，(3) 異なる弾性定数をもつ二次元半無限二層体における，移動集中荷重による影響を調べたので報告したい。

2．基礎式　荷重が x 正方向に速度 C で動く時，座標軸も同様に動かすと，擬定常状態[3]（quasi-stationary-state）での弾性基礎方程式は次の様になる。$\mathbf{U}=(u,v,w)$ は変位ベクトル，λ，$G=\mu$ はLameの定数，ρ は密度である。

$$(\lambda+G)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{U}+G\nabla^2\mathbf{U}=\rho C^2\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial x^2} \qquad (1)$$

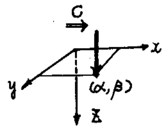

Fig 1

いま，$\mathbf{U}=\mathrm{grad}\,\varphi+\mathbf{\Psi}(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ とし，(1)に代入すると φ，ψ_i に関し次の式が成立する。

$$\left[\nabla^2-M_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi=0 \qquad \left[\nabla^2-M_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi_i=0\ ,\ (i=1,2,3) \qquad (2)$$

ただし，$\mathbf{\Psi}$ は回転成分であるから，　$\mathrm{div}\,\mathbf{\Psi}=0$ 　(3)

ここで，M_1，M_2 は，それぞれ，変容波，回転波に対する移動荷重のマッハ数であり，ここでは Subsonic すなわち $M_1<M_2<1$ だけをとりあつかうものとする。

(2)を x と y に関しフーリェ変換一変換された関数を大文字や上に一を付けて示す。一して，

$$\Phi=A_4e^{-n_1z}\ ,\quad \Psi_i=A_ie^{-n_2z}\ ,(i=1,2,3) \qquad (4)$$

$$n_1^2=(1-M_1^2)\xi^2+\eta^2\ ,\quad n_2^2=(1-M_2^2)\xi^2+\eta^2$$

いま，表面上の任意点 $x=\alpha$，$y=\beta$ に大きさ $p(\alpha,\beta)$ の集中荷重が働く時(Fig 1)，境界条件もフーリェ変換して

$$z=0\ ;\quad \bar{\sigma}_z=-p(\alpha,\beta)\,e^{i(\xi\alpha+\eta\beta)}\ ,\quad \bar{\tau}_{yz}=\bar{\tau}_{zx}=0 \qquad (5)$$

(3)および(5)より，$A_1\sim A_4$ が定まることにより，フーリェ変換形での変位，応力が求まり，そしてそれらを ξ，η に関して逆変換積分してやると所要の変位，応力式を求めることができる。一例をあげると

$$w=\frac{p(\alpha,\beta)}{4\pi^2G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_1}{B}\left[(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1z}-2(\xi^2+\eta^2)e^{-n_2z}\right]e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}}d\xi d\eta$$

$$\sigma_z=-\frac{p(\alpha,\beta)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}\left[(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1z}-4n_1n_2(\xi^2+\eta^2)e^{-n_2z}\right]e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}}d\xi d\eta \qquad (6)$$

$$B=(\xi^2+\eta^2+n_2^2)^2-4n_1n_2(\xi^2+\eta^2)$$

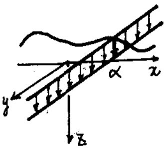

Fig 2

表面上に作用する任意の分布荷重による変位，応力は α，β に関し適当に積分する。例えば，

(a) 二次元平面ひずみ状態　$p(x,y)=p(x)$ とし，(6)で β に関し $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する。（Fig-2）

$$f=\frac{p(\alpha)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,0)\,e^{-i\xi(x-\alpha)}\,d\xi \qquad (7)$$

実際に(b)において $\eta=0$ とおき $\alpha=0$ の場合の解を求めると J. ColeとJ. Huthの求めたものと一致する。

(b) x 方向にのみ正弦波状荷重分布　$p(x,y)=Qe^{-ikx}$ とし　(6)で α に関し $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する。（Fig-3）

$$f=\frac{Q}{2\pi}e^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty}F(k,\eta)\,e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta \qquad (8)$$

(c) x，y 方向ともに正弦波状荷重分布　$p(x,y)=Qe^{-i(kx+ly)}$ とし，(6)で α，β に関し同様に積分する。

$$f=Q\,e^{-i(kx+ly)}\,F(k,l) \qquad (9)$$

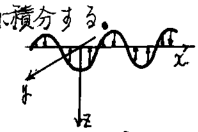

Fig 3

いま，とくに $p(x,y)=Q\sin kx\sin ly$ である時の変位および応力の一例をあげると，

$$w=\frac{Q}{G}\frac{n_1}{B}\times\left[(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1z}-2(k^2+l^2)e^{-n_2z}\right]\times\sin kx\sin ly$$

$$\sigma_z = -\frac{Q}{B}\times\left[(k^2+l^2+n_2^2)^2 e^{-n_1 z} - 4n_1 n_2 (k^2+l^2) e^{-n_2 z}\right]\times \sin kx \sin ly$$

$$\tau_{zx} = \frac{Q}{B}\times 2k n_1 (k^2+l^2+n_2^2)\left[e^{-n_1 z} - e^{-n_2 z}\right]\times \cos kx \sin ly \qquad (10)$$

3. 数値計算例 (a) 集中荷重 荷重をフーリエ級数に展開し，(10)を重ね合わせて変位，応力の数値解をもとむ。Fig4～Fig6 は $y=0.0$，$z=0.5$ での，w，σ_z，τ_{zx} を，M_2 をパラメータとして求めた結果である。ここで，横軸は荷重作用点からの距離であり，$M_2=0$ は Boussinesq 解である。また，table 1 は荷重の周期($2a$)の影響を調べたものである。周期 $2a=\infty$ は L.Fryba の求めた解－(6)における $\alpha=\beta=0$ に対応－を Simpson 二重数値積分を行ったものである。

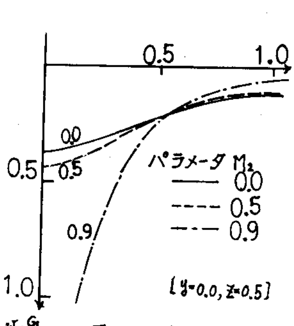

Fig 4 w

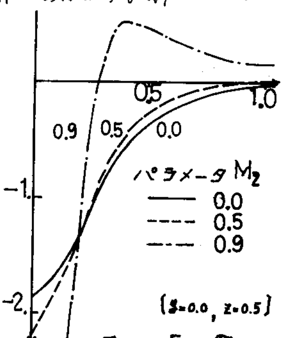

Fig 5 σ_z

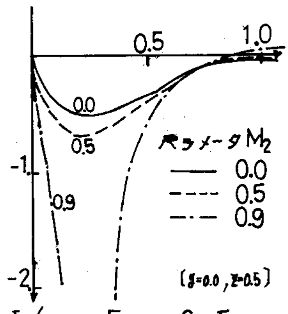

Fig 6 τ_{zx}

a	σ_z	w
2	1.915	0.286
4	1.920	0.330
6	1.920	0.345
8	1.920	0.352
20	—	0.365
30	—	0.368
50	—	0.370
∞	1.919	—
Boussinesq 解	1.910	0.371

{$M_2=0.1$, $x=0.$, $y=0.$, $z=0.5$}

Table 1

(b) x 軸上の正弦波上荷重分布 (8)の関係式を用いて(6)から変位，応力式がもとまる。Fig7～Fig10は $y=0$ での z 方向に関する w と σ_z の振幅を求めた結果である。パラメータは Fig7～Fig9 では k であり，Fig10では M_2 である。

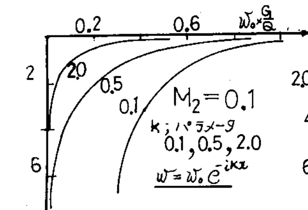

Fig 7 w_0 (1)

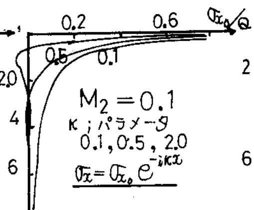

Fig 8 σ_{z_0}

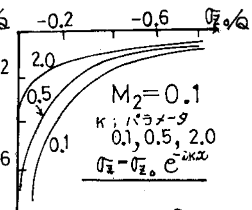

Fig 9 σ_{z_0}

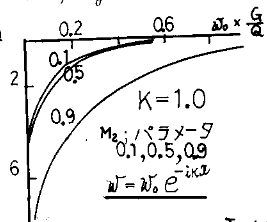

Fig 10 w_0 (2)

なお，この二次元問題は，2の(a)の式を用いて求まるが，それは岡本[4]が求めた解と一致する。

(c) 二次元二層問題 Fig11は，上層のポアソン比 ν だけを変えた時の，Fig12は上層の M_2 (ρ か G) だけを変えた時の，$x=0$ における z 方向の σ_z の分布を求めた結果である。

図において，破線はそれを境に弾性定数が異なることを示している。

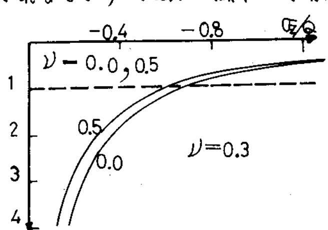

Fig 11

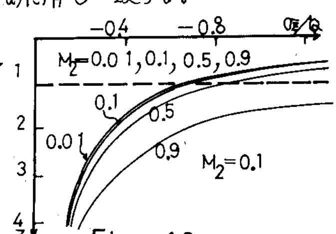

Fig 12

4. 考察 (1)，三次元問題でも マッハ数 $M_2(>M_1)$ が1に近くない限り，Boussinesq 解と大差ない。；荷重の級数展開により (2)，数値積分では求まらなかった変位の数値解を得ることができ，(3) 計算時間を大幅に縮小することができる。(3) 応力が小さい荷重周期でよいのに対し変位は比較的長い荷重周期を必要とする。

参考文献

1 J.Cole and J.Huth ; "Stresses Produced in a Half plane by Moving Loads", J. Appl. Mech., 25, 433, 1958

2 L.Fryba ; "Vibration of solids and Structures under Moving Loads", Noordhoff, Inte. Publ. p269

3 F.C.Fung (大橋,村上,神谷共訳) ; "固体の力学", 培風館, P263, 1970

4 岡本舜三 ; "建設技術者のための振動学", オーム社, P204, 1967

5 佐藤泰夫, 力武常夫 ; "矩形移動荷重に依る半無限体表面の変形", 地震, V.l.14, No5, 1942.5

6 Yoshiji Niwa and Shoichi Kobayashi ; "Stresses Produced in a Half Plane by Moving Loads along its surface", Memo. Faculty of Eng. Kyoto Univ.