

1. まえがき

非軸対称荷重の一例として、短円柱の上、下端面に半円形に分布した一様垂直荷重を考え、これを受ける短円柱の3次元応力解析を一般化された Neuber の解法に基づき、級数解法により行ったので報告する。

2. 基本解と応力関数

釣合方程式の基本解を変位ベクトル u で次のように表わす。

$$2Gu = -grad F + 4(1-\nu)\bar{\epsilon} + 2rot \varphi \quad \dots (1)$$

ここで

$$F = \bar{\Phi}_0 + R\bar{\epsilon} \dots (2), \quad \nabla^2 \bar{\Phi}_0 = \nabla^2 \bar{\epsilon} = \nabla^2 \varphi = 0 \dots (3)$$

$$\bar{\epsilon} = (\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad R = (r, \theta, z)$$

また、 G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比を表わすものとする。

図-1 に示した短円柱の応力状態が $z=0$ の面に関して対称となることを考慮して、式(3) から諸関数 $\bar{\Phi}_0$ および調和ベクトル $\bar{\epsilon}$, φ の成分を求めるに次のようである。

$$\bar{\Phi}_3 = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\alpha_m r) \cos m\theta \cosh \alpha_m z \dots (4.a)$$

$$\bar{\Phi}_3 = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} J_m(\alpha_m r) \cos m\theta \sinh \alpha_m z \dots (4.b)$$

$$\varphi_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\alpha_m r) \sin m\theta \cosh \alpha_m z \dots (4.c)$$

$$\bar{\Phi}_1 = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} I_m(\beta_n r) \cos m\theta \cos \beta_n z \dots (5.a)$$

$$\bar{\Phi}_1 = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} I'_m(\beta_n r) \cos m\theta \cos \beta_n z \dots (5.b)$$

$$\bar{\Phi}_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \frac{m}{r} I_m(\beta_n r) \sin m\theta \cos \beta_n z \dots (5.c)$$

$$\varphi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} I'_m(\beta_n r) \sin m\theta \sin \beta_n z \dots (5.d)$$

$$\varphi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \frac{m}{r} I_m(\beta_n r) \cos m\theta \sin \beta_n z \dots (5.e), \quad \bar{\Phi}_2 = 0 \dots (5.f)$$

上記の諸関数は応力関数または変位ポテンシャルと呼ばれるものである。 α_m および β_n は境界条件によって定まる固有値であり、この問題では、 $\alpha_m r = \lambda_m / a$ で $J_m(\alpha_m) = 0$ となるように λ_m を選び、 $\beta_n = n\pi / h$ とすると $(Trz)_{r=a} = 0$, $(Trz)_{z=\pm h} = 0$ および $(\sigma_{rz})_{z=\pm h} = 0$ という境界条件は式の上で満たされることになる。ただし、 $\lambda_m \neq 0$ である。

3. 付加すべき解

荷重の Fourier-Dini 展開に現われる定数項を処理するために簡単な解が必要となり、それを H. Neuber の解より求めて次式が得られる。

$$\bar{\Phi}_1(q,0) = A_00r, \quad \bar{\Phi}_2(q,0) = 0, \quad \bar{\Phi}_3(q,0) = B_00z \dots (6)$$

上式の応力関数から得られる応力は次のようである。

$$\sigma_r(q,0) = 2A_00 + 2\nu B_00 = \sigma_\theta(q,0), \quad \sigma_z(q,0) = 4\nu A_00 + 2(1-\nu)B_00 \dots (7)$$

また、式(4) から導出される応力の式を Fourier 級数に展開する際に $n=0$ の項が生ずるので、それを処理するために次の解が必要となる。

$$\bar{\Phi}_1(q) = \sum_{m=2}^{\infty} D_m0 \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m\theta \dots (8.a), \quad \bar{\Phi}_1(q) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m0 \left(\frac{r}{a}\right)^{m+1} \cos m\theta \dots (8.b)$$

$$\bar{\Phi}_2(q) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m0 \left(\frac{r}{a}\right)^{m+1} \sin m\theta \dots (8.c)$$

上記の応力関数から導出される応力は次のようである。

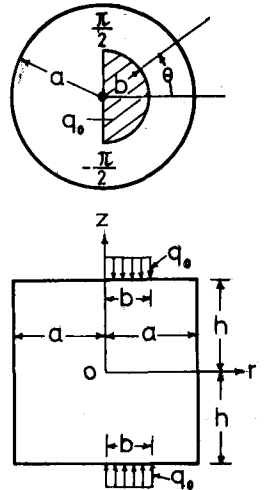


図-1 端面に半円形分布の垂直荷重を受ける短円柱

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(0) &= \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)(z-m) F_{m0} r^m / a^{m+1} \cos m\theta \\
 &- \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) D_{m0} r^{m-2} / a^m \cos m\theta \dots (9.a) \\
 \sigma_{\theta}(0) &= \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)(m+2) F_{m0} r^m / a^{m+1} \cos m\theta \\
 &+ \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) D_{m0} r^{m-2} / a^m \cos m\theta \dots (9.b) \\
 \sigma_z(0) &= 4\nu \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) F_{m0} r^m / a^{m+1} \cos m\theta \dots \\
 &\dots (9.c), \tau_{rz}(0) = \tau_{\theta z}(0) = 0 \dots (9.d) \\
 \tau_{r\theta}(0) &= \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) F_{m0} r^m / a^{m+1} \sin m\theta + \\
 &\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) D_{m0} r^{m-2} / a^m \sin m\theta \dots (9.e)
 \end{aligned}$$

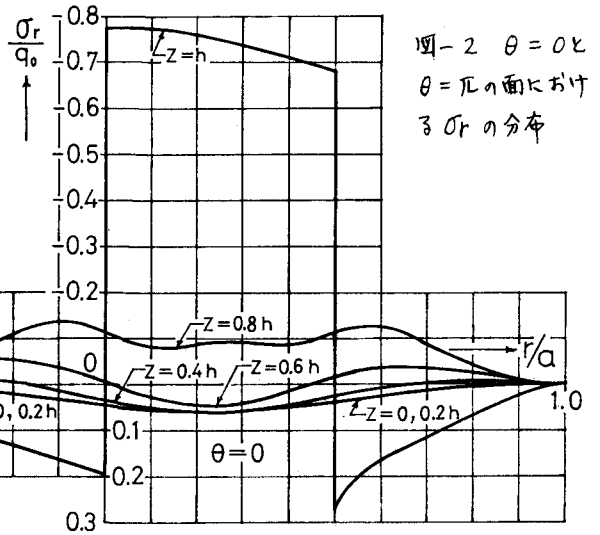


図-2 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の面における σ_r の分布

4. 境界条件と未知定数の連立一次方程式

$r = a$ で $\tau_{rz} = 0$, $z = \pm h$ で $\tau_{rz} = 0$ および $\tau_{\theta z} = 0$ という3つの境界条件は式の上で満たされるように未知定数間を関係づけることができ、残りの3つの境界条件より次の4群の連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r)_{r=a} = 0 \text{ より } \sum_{m=1}^{\infty} (H_{mn}^{(1)} C_{ms} + L_{mn}^{(1)} F_{mn} + M_{mn}^{(1)} E_{mn}) &= 0 \dots (10.a) \\
 (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0 \text{ より } \sum_{m=1}^{\infty} (H_{mn}^{(2)} C_{ms} - L_{mn}^{(2)} F_{mn} - M_{mn}^{(2)} E_{mn}) &= 0 \dots (10.b), F_{m0}/a = \\
 = -\nu m \cdot \sum_{m=1}^{\infty} C_{ms} \cdot J_m(\lambda_m a) \cdot \sinh \lambda_m h & \\
 / (\lambda_m a) \dots (10.c), (\sigma_z)_{z=\pm h} = -p(r, \theta) & \\
 \text{より } N_{ms} C_{ms} + \sum_{n=1}^{\infty} (n C_{ns} F_{mn} + n P_{ns} E_{mn}) & \\
 - Q_{ms} F_{m0}/a = p_0 (\delta_m \delta_{\theta 0} + \delta_m \delta_{\theta \pi}) \dots (10.d) &
 \end{aligned}$$

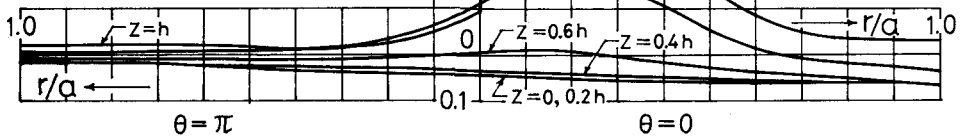


図-3 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の面における σ_{θ} の分布

5. 数値計算例

$a = h$, $b/a = 0.5$, ポアソン比 $\nu = 0.25$ とし、級数の項数を m は0を含め奇数のみ12項、 n および m は40項取って計算し、 $\theta = 0$ および $\theta = \pi$ の面における応力分布を右図に示した。

注) 参 考 文 献: 三次元応力問題の解法 下

いて、北海道大学工学部研究報告第13号、昭和30年12月

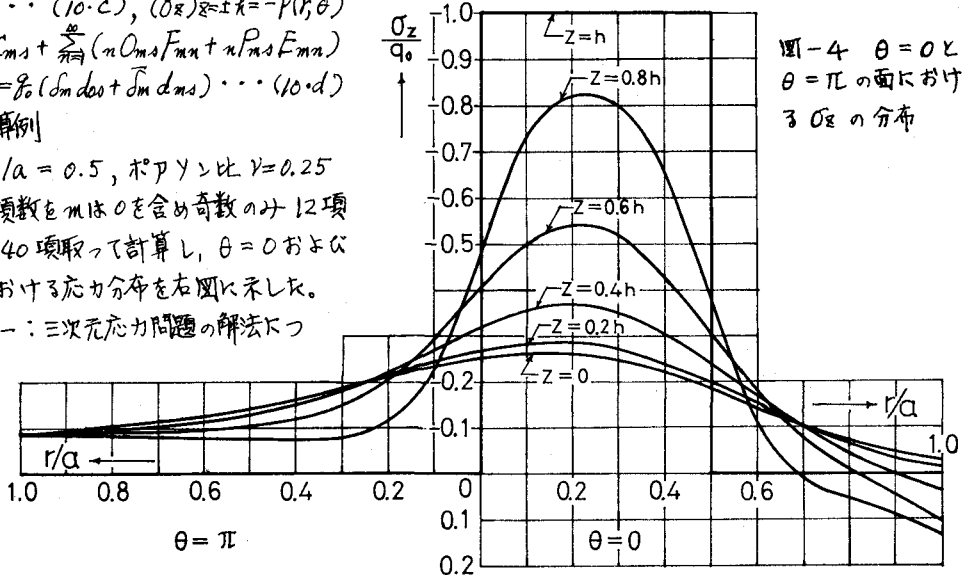


図-4 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の面における σ_z の分布