I-87 ケーブル構造に関する力学的一考察

東京大学 ○阿井 正博
東京大学 西岡 隆
埼玉大学 奥村 敏恵

1. まえがき

ケーブル構造は変形に伴って生じる幾何剛性を積極的に利用した構造物であり、一般に変形が大きい。従って、変形解析は幾何学的非線形問題となるが、著者等は、既に前報[3]において、任意荷重条件下のケーブル構造一般に対する厳密な変形解析の一方法を示した。一方、ケーブル構造では、その大変形性により、所定の外荷重作用時の釣合形状があらかじめ設定された形状になるよう構造系を定める、いわゆる形状決定問題が重要な問題となり、本報告は主にそのことについて述べたものである。

2. 変形解析

ケーブル構造の部材力分布は、構造系中の有限個の適合力を未知として、

$$\text{部材力}:\{\mathbf{T}(s)\}=[S_P]\{\mathbf{t}\}+[S_{PJ}]\{\mathbf{P}_J\}+[S_{PM}]\{\mathbf{P}_M\}-\Big\{\int_0^s \mathbf{q}(s)\,ds+\sum_{s_j^i<s}\mathbf{P}_M^{i(j)}\Big\} \qquad \cdots (1)$$

として表わせる。ここに、$\mathbf{P}_J^k\ (k=1\cdots n)$, $\mathbf{q}^i(s)$, $\mathbf{P}_M^{i(j)}$, $\mathbf{P}_M^i\ (i=1\cdots m,\ j=1\cdots n_i)$ は、浮動節点集中外力、分布外力、部材上の集中外力、及び部材上の合外力であり、$\{\mathbf{t}\}$ が適合力である。従って、適合力を仮定すれば、部材力が決まり、それによりケーブル各部材の釣合形状が決まるが、$\{\mathbf{t}\}$ は真値ではないので適合力を考えた個所に、

$$\text{不適合量}:\{\mathbf{e}\}=[S_x]\{\mathbf{x}_M\}+[S_x^*]\{\mathbf{x}^*+\mathbf{u}\} \qquad \cdots\cdots (2)$$

が生じる。ここに、$\mathbf{x}_M^i$ は部材の始端、終端間の相対ベクトルであり、$\mathbf{x}^{*i}$, $\mathbf{u}^i$ は、支持節点の空間座標、および反力によるその変位である。

結局、問題は(2)式の $\{\mathbf{e}\}$ が $\{\mathbf{0}\}$ となるような真の適合力を得ることであり、その繰返し計算において修正式として用いる線形化式は、

$$\{\delta\mathbf{e}\}=\big([S_x][Q][S_P]+[S_x^*][Q^*][S_P^*]\big)\{\delta\mathbf{t}\}=[D_x^t]\{\delta\mathbf{t}\} \qquad \cdots (3)$$

の形で得られる。ここに、

$$[Q]=\begin{bmatrix}\int_0^{\ell^1}\mathbf{H}^1(s)\,ds & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \int_0^{\ell^m}\mathbf{H}^m(s)\,ds\end{bmatrix},\quad [Q^*]=\begin{bmatrix}\frac{\partial\mathbf{u}^1}{\partial\mathbf{R}^1} & \cdots & \frac{\partial\mathbf{u}^1}{\partial\mathbf{R}^{n_s}}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\mathbf{u}^{n_s}}{\partial\mathbf{R}^1} & \cdots & \frac{\partial\mathbf{u}^{n_s}}{\partial\mathbf{R}^{n_s}}\end{bmatrix}, \qquad \cdots (4)$$

$$\mathbf{H}(s)=\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{|\mathbf{T}(s)|}\Big)\mathbf{I}-\frac{\mathbf{T}(s)\,\mathbf{T}^T(s)}{|\mathbf{T}(s)|^3}$$

である（α：伸び剛性、$\mathbf{R}^i$：支持点反力）。

真の適合力 $\{\mathbf{t}\}$ が得られれば、それを用いて釣合形状は、

$$\text{浮動節点座標}:\{\mathbf{x}_J\}=[S_{xJ}]\{\mathbf{x}_M\}+[S_{xJ}^*]\{\mathbf{x}^*+\mathbf{u}\},$$

$$\text{部材上の任意点座標}:\{\mathbf{x}(s)\}=[S_{xM}]\{\mathbf{x}_M\}+[S_{xM}^*]\{\mathbf{x}^*+\mathbf{u}\}+\Big\{\int_0^s\Big(\frac{\mathbf{T}}{\alpha}+\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|}\Big)ds\Big\}$$

として表わせる。

3. 形状決定問題.

釣合状態にあるケーブル構造において、部材長、断面定数、支持節点座標等の増分量による釣合形状、部材断面力等の増分量を表わす線形化式が得られれば、それを形状決定問題の修正式として用いることができる。

部材長の増分 $\{\delta l\}$ と支持節点座標の増分 $\{\delta x^*\}$ を考え、それによる適合力の増分を $\{\delta f\}$ とすれば、部材断面力、及び支持節点反力の増分は、

$$\{\delta T(\alpha)\} = [S_P]\{\delta f\} + [S_{PH}][D]\{\delta l\}, \quad \{\delta R\} = [S^*_P]\{\delta f\} + [S^*_{PH}][D]\{\delta l\} \quad \cdots (5)$$

となる。ここに、$[D]$ は $\{\delta l\}$ による分布外力の増分に関するマトリックスであり、δl を考える場所での分布外力を対角成分とする。この $\{\delta T(\alpha)\}$ による $\{x_H\}$ の増分は、(4)式を展開して得られ、それに部材長の増分を考慮して、

$$\{\delta x_H\} = [Q][S_P]\{\delta f\} + ([Q][S_{PH}][D] + [G])\{\delta l\} \quad \cdots (6)$$

となる。この時、$[G]$ は δl を考える場所での部材の方向余弦を成分とする対角マトリックスとなる。固定節点変位の増分量も(6)式と同様に $\{\delta f\}$ と $\{\delta l\}$ で表わすことができる。増分を考えた後にも適合条件は保たれねばならないから、これら二式を(2)式の線形化式に代入し、$\{\delta \bar{x}\} = \{0\}$ とすることにより、適合力の増分量 $\{\delta f\}$ が

$$\{\delta f\} = -[T^P_x]^{-1}([T^{PH}_x][D] + [S_x][G])\{\delta l\} - [T^P_x]^{-1}[S^*_x]\{\delta x^*\} \quad \cdots (7)$$

として得られる。

$\{\delta f\}$ を(5),(6)式に代入して、

$$\{\delta T(\alpha)\} = ([S_{PH}][D] - [S_P][T^P_x]^{-1}([T^{PH}_x][D] + [S_x][G]))\{\delta l\} - [S_P][T^P_x]^{-1}[S^*_x]\{\delta x^*\} \quad \cdots (8)$$

$$\{\delta R\} = ([S^*_{PH}][D] - [S^*_P][T^P_x]^{-1}([T^{PH}_x][D] + [S_x][G]))\{\delta l\} - [S^*_P][T^P_x]^{-1}[S^*_x]\{\delta x^*\} \quad \cdots (9)$$

$$\{\delta x_H\} = ([Q][S_{PH}][D] + [G] - [Q][S_P][T^P_x]^{-1}([T^{PH}_x][D] + [S_x][G]))\{\delta l\} - [Q][S_P][T^P_x]^{-1}[S^*_x]\{\delta x^*\} \quad \cdots (10)$$

等が得られ、これらを用いて、

浮動節点座標の増分量：
$$\{\delta x_f\} = ([T^{PH}_{xf}][D] + [S_{xf}][G] - [T^P_{xf}][T^P_x]^{-1}([T^{PH}_x][D] + [S_x][G]))\{\delta l\} + ([S^*_{xf}] - [T^P_{xf}][T^P_x]^{-1}[S^*_{xf}])\{\delta x^*\} \quad \cdots (11)$$

が得られる。

以上、求めた(8)~(11)の線形化式より、形状決定問題において変数として扱う部材長、固定節点座標に対応する列成分、所要値を考える変数と同数の行成分をとり出して、修正式を表わすマトリックスを得ることができる。

4. 数値計算例

Fig.1に示すような4点支持双曲面ケーブル・ネットの形状決定、及び変形解析を行った。ケーブルの断面定数は、外縁ケーブル：単位長さ重量 9.2 kg/m, 伸び剛性 EA = 18112 ton, 内側ケーブル：4.6 kg/m, EA = 9056 ton である。形状決定の条件として、自重のみの作用時において、

(1) 内側ケーブルの面内引張力成分はすべて 1 ton,

(2) 水平面内での形状が、図に示すような格子状になるような

48部材の部材長を求める問題とした。初期部材長として、内側ケーブル長 9.5m, 外縁ケーブル長 15.8m を与え、その時の釣合形状は、Fig.1 の破線に示すようであった。

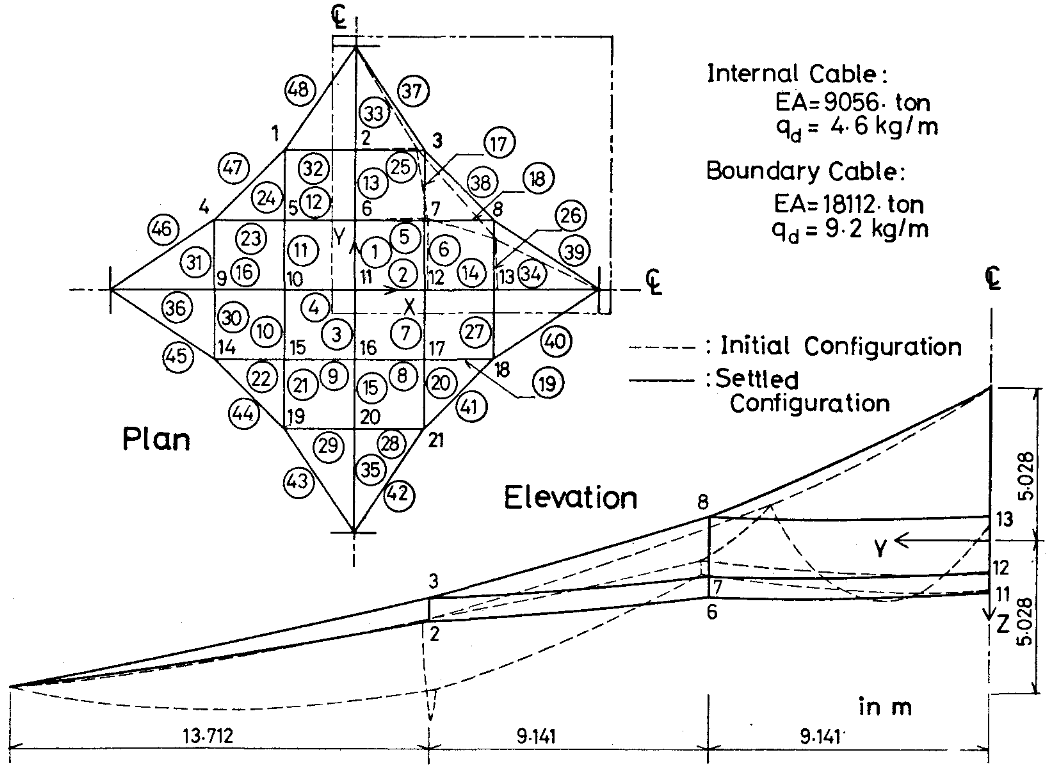

Fig.1 Settled Equilibrium Configuration

Table 1. Member Length

Member	Length(m)
1,3	9.147
2,4	9.165
5,8,9,12	9.169
6,7,10,11	9.146
13,15	9.182
14,16	9.325
17,20,21,24	9.174
18,19,22,23	9.355
25,28,29,32	9.175
26,27,30,31	9.145
33,35	13.900
34,36	14.361
37,42,43,48	16.751
38,41,44,47	13.213
39,40,45,46	17.034

Flow Joint	Z-Coordinate (m)
1,3,19,21	-2.024
2,20	-2.789
4,8,14,18	0.712
5,7,15,17	-1.270
6,16	-1.949
9,13	0.778
10,12	-1.051
11	-1.691

Boundary Member	Mean Member Force (ton)
37,42,43,48	7.12
38,41,44,47	7.06
39,40,45,46	7.31

繰り返し計算の結果、得られた部材長、滑動節点のZ座標、及び外縁ケーブルの部材力は、Table-1. のようであった。この時、形状決定に関する繰り返し回数は12回であり、誤差は、

面内座標の平均誤差 = 0.9 mm
面内部材力の平均誤差 = 0.025 ton

であった。

[参考文献] 1) Siev, A. and Eiderman, J., "Shapes of Suspended Roofs," Proceedings, IASS, July, 1962. 2) Dean, D.L., and Ugarte, C.P., "Analysis of Structural Nets," Publications, IABSE, Vol. 23, 1963. 3) 阿井正博, 西岡隆, 奥村敏恵, "ケーブルの力学的特性に関する一考察," 第29回土木学会年次学術講演概要集, 1974.