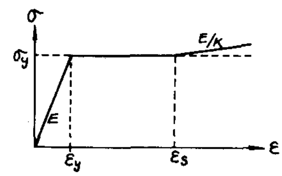
I-80　　塑性域の拡がりを考慮した平面骨組の弾塑性解析に関する基礎的研究

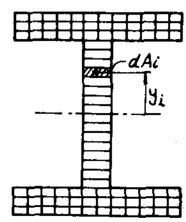
パシフィックコンサルタント　正員　○武智正博
徳島大学工学部土木工学科　正員　平尾　潔
徳島大学工学部土木工学科　正員　児嶋弘行

1. 要旨　　本研究は，漸増節点荷重をうける任意の平面骨組を対象として，弾塑性状態における曲げモーメントと曲率（以下，M−Φと記す）との非線形関係，ならびに，塑性域の部材軸方向の拡がりを考慮した組織的な一弾塑性解析法について研究し，その解析プログラムを作成して，2，3の数値計算例を示し，他の解析法による解析結果[1]との比較検討を行なって，簡単な考察を加えたものである。



図−1

2. 解析上の仮定　　本解析では，1）材料の応力−ひずみ曲線は図−1のように表わされ，時間に無関係とする。2）部材は一定断面の直線部材とする。3）軸方向力，および，せん断力による降伏モーメント，ならびに，全塑性モーメントの低下は無視する。4）幾何学的非線形性については，変形による座標系のずれのみを考慮する。5）部材座屈については，両端ヒンジ部材のオイラー座屈のみを対象とする。6）荷重はすべて比例的に増大する節点集中荷重とする。などの仮定を設けた。



図−2

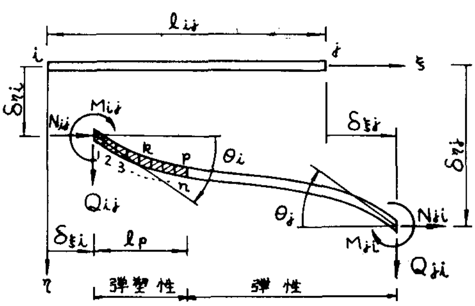
3. M−Φ関係　　弾塑性状態におけるM−Φ関係の理論式は断面形によって異なり，残留応力とかひずみ硬化の影響を考慮すると非常に複雑になる。そこで，本解析では，図−2のように断面を微小矩形要素に分割し，各要素の物理量は，それぞれ，要素の中心に集中していると考え，数値積分により，断面力と応力度との関係を式（1）で表わし，試行錯誤によってM−Φ関係の近似値を求める方法をとった[2]。

$$\left.\begin{aligned} M &= \int_A \sigma\cdot y\cdot dA \doteqdot \Sigma\,\sigma_i\cdot y_i\cdot dA_i \\ N &= \int_A \sigma\cdot dA \doteqdot \Sigma\,\sigma_i\cdot dA_i \end{aligned}\right\} \text{—(1)} \qquad \sigma_i=\begin{cases} E\cdot\varepsilon_i & : (\varepsilon_i<\varepsilon_y) \\ \sigma_y & : (\varepsilon_y\leqq\varepsilon_i\leqq\varepsilon_s) \quad \text{—(2)} \\ \sigma_y+(E/k)(\varepsilon_i-\varepsilon_s) & : (\varepsilon_i>\varepsilon_s) \end{cases}$$

ただし，

$\varepsilon_i=\varepsilon_{\phi i}+\varepsilon_{oi}+\varepsilon_{ri}$　—(3)，　ここで，$\varepsilon_\phi=\Phi\cdot y_i$：曲げひずみ，$\varepsilon_o$：軸方向ひずみ，$\varepsilon_r$：残留ひずみ

4. 変形法の基本式　　弾性端部材については，2. 4)の仮定により，周知の線形基本式を用いたが，弾塑性端部材に対しては，あらたな基本式を誘導して用いた。以下に，i端弾塑性部材を例にとってその誘導法を簡単に示す。最初に，図−3のように弾塑性部分（長さ ℓ_p）をn等分した場合の要素kを，図−4のように取り出して，この要素の柔性マトリックスを誘導する。要素内の曲率 Φ_ξ' を，図−5に示す2種類の割線係数（α_k, β_k）を用いて，近似的に



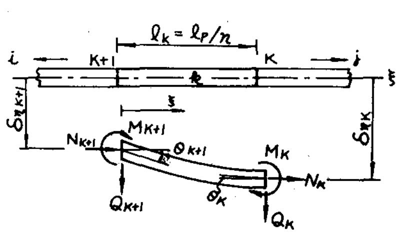
図−3

$$\Phi_{\xi'}=\Phi_{k+1}+d\Phi=(\beta_k\cdot M_{k+1}+\alpha_k\cdot dM)/EI$$
$$=(\beta_k\cdot M_{k+1}-\alpha_k\cdot Q_{k+1}\cdot\xi')/EI \qquad \text{—— (4)}$$

と表わし，これを，Φ−公式，

$$\left.\begin{aligned} \Theta_k &= \Theta_{k+1}-\int_0^{\ell_k}\Phi_{\xi'}\cdot d\xi' \\ \delta_{\eta k} &= \delta_{\eta k+1}+\ell_k\cdot\Theta_{k+1}-\int_0^{\ell_k}\Phi_{\xi'}(\ell_k-\xi')\,d\xi' \end{aligned}\right\} \text{—— (5)}$$

に代入して積分し，K端固定，すなわち，$\delta_k=\{\delta_{\eta k},\ \Theta_k\}^T=0$ として整理すれば，式（6）を得る。



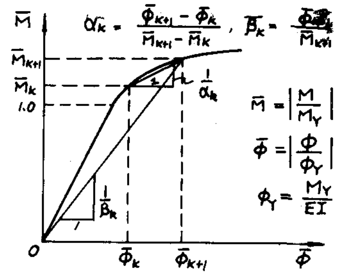
図−4

$\delta_{k+1} = \mathbb{F}_k \cdot \mathbb{S}_{k+1}$ —— (6)　ただし，δ_{k+1}, $\mathbb{S}_{k+1}$, および，$\mathbb{F}_k$は，

$\delta_{k+1} = \{\delta_{\eta k+1},\ \Theta_{k+1}\}^T$,

$\mathbb{S}_{k+1} = \{Q_{k+1},\ M_{k+1}\}^T$,

$$\mathbb{F}_k = \frac{1}{6EI}\begin{pmatrix} 2\alpha_k l_k^3, & -3\beta_k l_k^2 \\ -3\alpha_k l_k^2, & 6\beta_k l_k \end{pmatrix} \quad \text{—— (7)}$$



図－5

つぎに，平衡条件，$\mathbb{S}_{k+1} + \mathbb{H}_k \cdot \mathbb{S}_i = 0$ より，各要素kの平衡マトリックス$\mathbb{H}_k$を求め，文献3)の合成部材の概念を導入して，$l_k = l_p/n$を考慮すれば，弾塑性部分の柔性マトリックス$_p\mathbb{F}_{ii}$がつぎのように求まる。

$$_p\mathbb{F}_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{H}_k^T \cdot \mathbb{F}_k \cdot \mathbb{H}_k = \frac{1}{6EI}\begin{pmatrix} 2\lambda_1 l_p^3, & -3\lambda_2 l_p^2 \\ -3\lambda_3 l_p^2, & 6\lambda_4 l_p \end{pmatrix} \quad \text{—— (8)}$$

ただし，$\mathbb{H}_k = \begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ -(k-1)l_k, & 1 \end{pmatrix}$,

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = \frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}\{\alpha_k(3k-1) + 3\beta_k(2k-1)\}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k \\ &\lambda_2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k(2k-1), \quad \lambda_3 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\{+2\beta_k(k-1)\} \end{aligned}\right\} \quad \text{—— (9)}$$

以上の弾塑性部分と弾性部分（長さ $l_e = l - l_p$）とを合成すれば，部材全体の柔性マトリックスが，

$$\mathbb{F}_{ii} = {_p\mathbb{F}_{ii}} + \mathbb{H}_e^T \cdot \mathbb{F}_e \cdot \mathbb{H}_e = \frac{1}{6EI}\begin{pmatrix} 2\mu_1 l^3, & -3\mu_2 l^2 \\ -3\mu_3 l^2, & 6\mu_4 l \end{pmatrix} \quad \text{—— (10)}, \quad \mathbb{H}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -l_p & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}_e = \frac{1}{6EI}\begin{pmatrix} 2l_e^3 & -3l_e^2 \\ -3l_e^2 & 6l_e \end{pmatrix}$$

ただし，$\mu_1 = 1 - r^3 + \lambda_1 r^3$，$\mu_2 = 1 - r^2 + \lambda_2 r^3$，$\mu_3 = 1 - r^2 + \lambda_3 r^3$，$\mu_4 = 1 - r + \lambda_4 r^3$，$r = l_p/l$

として求まり，これより，この場合の$\mathbb{S}_{i,j} = \{Q, M\}_{ij,ji}^T$と$\delta_{i,j} = \{\delta_\eta, \Theta\}_{i,j}^T$との関係が，つぎのように求まる。

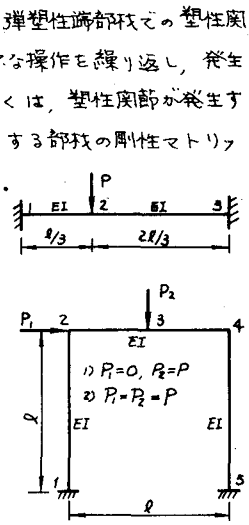
$$\left.\begin{aligned} \mathbb{S}_i &= \mathbb{K}_{ii} \cdot \delta_i + \mathbb{K}_{ij} \cdot \delta_j \\ \mathbb{S}_j &= \mathbb{K}_{ji} \cdot \delta_i + \mathbb{K}_{jj} \cdot \delta_j \end{aligned}\right\} \text{—— (11)}, \quad \mathbb{K}_{ii} = \mathbb{F}_{ii}^{-1}, \quad \mathbb{K}_{ij} = \mathbb{K}_{ji}^T = -\mathbb{K}_{ii} \cdot \mathbb{H}^T, \quad \mathbb{K}_{jj} = \mathbb{H} \cdot \mathbb{K}_{ii} \cdot \mathbb{H}^T, \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -l & 1 \end{pmatrix}$$

また，$N = EA(\delta_{\xi i} - \delta_{\xi j})/l$ —— (12)

j端弾塑性部材，および，両端弾塑性部材についても同様にして誘導することができ，また，滑節，あるいは，塑性関節部材についても，該当する材端のモーメントを0，または，M_p（全塑性モーメント）と等置し，対応する変位（節点回転角）を消去することによって誘導できる。

5．解析手順　本解析法における解析手順の概略はつぎのようである。1）適当な単位荷重を与えて弾性解を求め，これより最小荷重倍数を決定して，最初に塑性域が発生するときの荷重強度，節点変位，材端力などを求める。2）塑性域が生じた部材の剛性マトリックスを修正する。3）一定の荷重増分を与え，材端力，節点変位などを収束計算によって求め，この荷重増分間で，弾性端部材でのあらたな塑性域や弾塑性端部材での塑性関節の発生の有無を検討し，発生しない場合には，さらに，一定の荷重増分を与えて同様な操作を繰り返し，発生する場合には4)の手順に移る。4）増分最小荷重倍数を用いて，あらたな塑性域，もしくは，塑性関節が発生するときの荷重強度，節点変位，材端力などの収束値を，繰返し計算によって求め，該当する部材の剛性マトリックスを修正して3)の手順へ帰る。3)，4)の手順を，骨組が崩壊するまで繰返し続行する。

6．計算例　図－6に示す両端固定ばり，および，门型ラーメンについて解析した結果を，文献1)や通常の弾塑性解析による結果と比較して，講演会当日に紹介する。



図－6

7．結論　本研究で現在までに得られた結論を列挙すれば，つぎのようである。1）本解析結果と文献1)の第2近似解の結果とはよく一致する。2）通常の弾塑性解析の結果と比較した場合，崩壊荷重は一致するが，変位はかなり大きくなる。3）残留応力がある場合には，ない場合よりも，断面の降伏が早まるため変位が大きくなる。4）工型断面のように，全塑性モーメントの近くで曲率が急速に増大するような場合には，本解析法では，繰返し計算における収束が非常に悪くなる。

8．参考文献　1）山崎，太田，石川：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析，土木学会論文集，第134号。2）S.Santathadaporn & W.F.Chen : Analysis of Biaxially Loaded Columns, Fritz Engineering Laboratory Report No. 331.12, September, 1970。3）R.K. Livesley : Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, 1964。