

広島大学工学部 正員 大村 裕
 " " 学生員 林 博明
 " " 学生員 桑名正博

1. はじめに

軸力、曲げおよびねじりが同時に作用する構造部材の弾塑性挙動はきわめて複雑で、解析的に解くことは、非常に難しく、特殊形状断面についての解が得られているにすぎない。これに対して、弾塑性問題における非線形挙動を区分的線形近似して取り扱う手法が、電子計算機の発達に伴い可能となってきた。この中で、特に有限要素法を用いる方法は弾性問題とほぼ同様な扱いによって解くことができ、任意形状断面部材についての適用が可能である⁽¹⁾。本報告では、土木構造部材として、基本的な工型断面部材の弾塑性挙動と有限要素法を用いて解析し、弾性域、弾塑性域、全塑性域における応力分布状態、および負荷方法と応力経路等について考察を行なったものである。

2. 有限要素法の適用

断面一樣な梁が一樣な軸力、純曲げ、および一樣なねじりを受ける場合の変位関数は次のように与えられる。断面内に x, y 軸、梁の軸方向に z 軸をとると、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y) - \theta y z + \frac{1}{2} \tau z^2 \\ v &= v_0(x, y) + \theta x z + \frac{1}{2} \beta z^2 \\ w &= w_0(x, y) + \epsilon z - \beta y z - \tau x z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_0 &= C_{11} + C_{12}x + C_{13}y + (C_{14}xy) \\ v_0 &= C_{21} + C_{22}x + C_{23}y + (C_{24}xy) \\ w_0 &= C_{31} + C_{32}x + C_{33}y + (C_{34}xy) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ただし、} C_{11} \sim C_{34} \text{ は未} \\ \text{定係数であり第四項} \\ \text{は四角形要素の場合} \\ \text{に用いる。} \end{array}$$

ここに、 θ : ねじり率 β : x 軸まわりの曲率 u_0, v_0 : 断面内変形
 ϵ : z 軸方向ひずみ τ : y 軸まわりの曲率 w_0 : 断面のゆがみ(そり)

工型断面のような薄肉閉断面部材のねじりでは、肉厚方向に応力あるいはひずみの変化が大きいため、肉厚方向に十分な要素分割をする必要があるが、計算機容量の制限により要素は細長いものとなる。この場合、三角形要素を用いると精度が悪く、かなり実際と異なる成分が現われる。したがって、弾塑性計算には十分でない。これに対して、四角形要素を用いるときわめて精度が良いことがわかった。これは、四角形要素を用いた場合の変位関数におけるゆがみの項 w_0 が、薄肉閉断面のねじりのゆがみ関数として適当であるためと考えられる。

また、上記の変位関数を用いると三次元状態の応力およびひずみ成分が得られる。一般的な梁の理論では無視される二次的な応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は実際に計算してみると他の応力成分 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ の6%程度のものであった。この二次的な応力を無視できるものとするれば、これに対応するひずみ成分は応力とひずみの増分関係式により消去される。ところが、上記の変位関数からわかるように、 $\sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ に対応するひずみ成分 $\epsilon_x, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ は、 z 方向変位 w 、および $\epsilon, \beta, \tau, \theta$ のみによって表われるので、剛性方程式は、 z 方向変位および $\epsilon, \beta, \tau, \theta$ に関するものとなる。この場合、計算機容量が大いに縮小され、小型計算機でも十分な精度が得られるように要素分割をすることが出来る。

二次的な応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を無視した場合の三角形要素および四角形要素の剛性マトリックスは次のようになる。剛性マトリックスに対応する節点変位ベクトルを

$$\{d\}^T = [\{w\}^T, \{\delta\}^T], \quad \{\delta\}^T = [\epsilon, \beta, \tau, \theta]$$

ここに、三角形要素に対しては、
 $\{w\}^T = [w_1, w_2, w_3]$ 、四角形要素に対しては、 $\{w\}^T = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ とし、要素の剛性マトリックスを $[k^e]$ とおくと、

$$[R^e] = \begin{bmatrix} [R_{uu}] & [R_{us}] \\ [R_{su}] & [R_{ss}] \end{bmatrix}, \begin{cases} [R_{uu}] = \iint [A]^T [P_u]^T [D] [P_u] [A] dx dy \\ [R_{us}] = \iint [P_s]^T [D] [P_u] [A] dx dy \\ [R_{su}] = \iint [P_s]^T [D] [P_s] dx dy, \end{cases} [R_{ss}] = [R_{us}]^T$$

ここに、三角形要素では、

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}, [P_u] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [P_s] = \begin{bmatrix} 1 & -y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{bmatrix}$$

四角形要素では、 $[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix}$, $[P_u] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix}$, $[P_s]$ は 三角形要素と同じ。

$[D]$ は、 G_x, G_y, G_{xy} をゼロとした場合の応力とひずみの増分関係を示すマトリックスで、 $[\sigma_x, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$ と $[\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}]$ に対応する。

3. 計算結果と考察

二軸対称部材に軸力、 x 軸まわりの曲げ、 y 軸まわりの曲げ、およびねじりが作用する場合には、塑性域の抜かりは非対称となるが、ねじりと他の一つの組合せの場合には二軸対称となるので、 $1/2$ 断面について計算すればよい。図1にI型断面部材の断面寸法および材料特性を示す。本計算では、ひずみ硬化がないうち完全塑性材料として行なった。要素分割は $1/2$ 断面について行なった。全要素数は、177、全節点数は、213となった。

また、バンド・マトリックス法を用いる都合で、三角形要素と四角形要素を併用した。

図2は、曲げ対ねじり (M/T) = 1.0 の場合の応力分布を弾性弾塑性、および全塑性状態について図示したものである。弾性状態では、曲げによる直応力 σ は、中立軸からの距離、ねじりによるせん断応力 τ は、肉厚中心からの距離に比例するが、荷重増加とともに塑性域が抜かり、全塑性状態では、肉厚中心部で直応力 σ が大きく、外側でせん断応力 τ が大きく分布している。図3は、(i)比例負荷、(ii)最初に曲げを加えた後ねじりを加える、(iii)最初にねじりを加えた後曲げを加える。の負荷方法に対する応力経路を図示したものである。

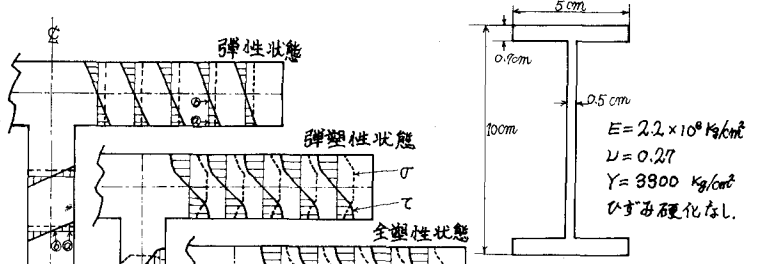


図1. 断面寸法、材料特性

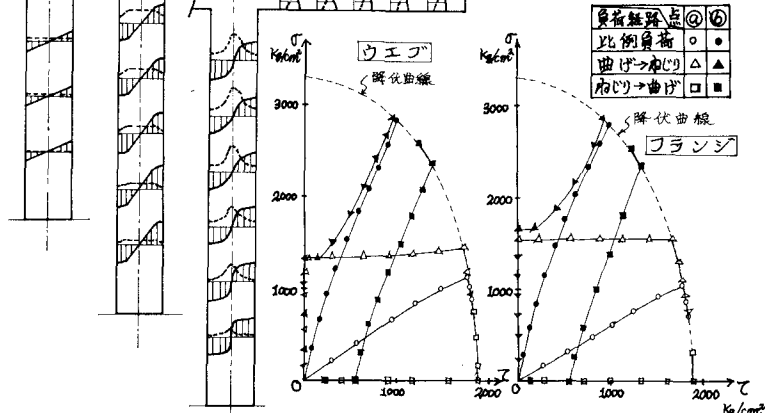


図2. 応力分布

図3. 応力経路

<参考文献> (1) 山田嘉昭, 高松公郎; 組み合せ荷重を受ける棒の弾塑性解析 1-軸荷重と捻りの組合せ

昭和46年6月2日~4日, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会. マトリックス構造解析法研究発表論文集