

大阪大学工学部 正員 小松定夫
 大阪大学工学部 正員 〇北田俊行
 大阪大学大学院 学生員 岡田純一

□ まえがき

有限要素法の出現と大型電子計算機の発達により、従来は解析不可能とされていた弾塑性大たわみ現象の解析が克服されたのに見えた。しかし、有限要素法においては、解析にあたり自由度が非常に増大するため、コンピュータの膨大な記憶容量を必要とし、又、計算時間も増大してくる。従来の解析的手法ではあまり問題とならなかった上述のような新しい問題が生じてくる。本研究は、これらの問題を克服するため有限要素法による解析手法に Modal Analysis 的的手法を導入することにより自由度の低減を行うような解析手法の提案を行うものである。

② 解析法

考えている圧縮板の変形状態(i)を平面の三角形要素の集合体で近似し、2次以上の幾何学的剛性マトリックスの項を無視すると、状態(i)から変位増分 ΔU_n を与えた時の要素nの全ポテンシャルエネルギー Π_n は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_n = & I_n + \frac{1}{2} \Delta U_n^T \cdot L_n^T \cdot k_n \cdot L_n \cdot \Delta U_n \\ & - U_n^T \cdot L_n^T \cdot (F_n + \Delta F_n) - \Delta U_n^T \cdot L_n^T \cdot \Delta F_n \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 I_n : 状態(i)における要素nのひずみエネルギー、 L_n : 座標変換マトリックス、 k_n : 要素の持線剛性マトリックス、 U_n, F_n : 状態(i)における全体座標系で表わした要素nの節点変位および節点力、 $\Delta U_n, \Delta F_n$: 状態(i)からの節点変位増分および節点力増分。

ここで、図-1に示すように構造系全体の自由度を減らすために、変位を既知のモードで仮定する。変位のモードを表わすマトリックスを H_n 、モード化された一般化変位ベクトル増分を $\Delta \tilde{U}$ とすると、

$$\Delta U_n = H_n \cdot \Delta \tilde{U} \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入して $\delta \Delta \tilde{U}$ に対する Π_n の一次変分を求めると

$$\delta \Pi_n = \delta \Delta \tilde{U}^T \{ \tilde{K}_n \cdot \Delta \tilde{U} - \Delta \tilde{F}_n \} \quad (3)$$

ここで

$$\tilde{K}_n = H_n^T \cdot L_n^T \cdot k_n \cdot L_n \cdot H_n \quad (4)$$

$$\Delta \tilde{F}_n = H_n^T \cdot L_n \cdot \Delta F_n \quad (5)$$

$\delta \Pi_n$ を全要素について集成し、全系についてポテンシャルエネルギー極小の原理を適用すると、

$$\sum_{n=1}^m \delta \Pi_n = 0 \quad (m: \text{全要素数}) \quad (6)$$

式(3)を式(6)に代入し、任意の $\delta \Delta \tilde{U}$ に対して式(6)が成立するためには、

$$\tilde{K} \cdot \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{F} \quad (7)$$

$$\text{ここで} \quad \tilde{K} = \sum_{n=1}^m \tilde{K}_n \quad (8)$$

$$\Delta \tilde{F} = \sum_{n=1}^m \Delta \tilde{F}_n \quad (9)$$

その他の解析の手順は、文献(1)の有限要素法のみ解析法と同様である。

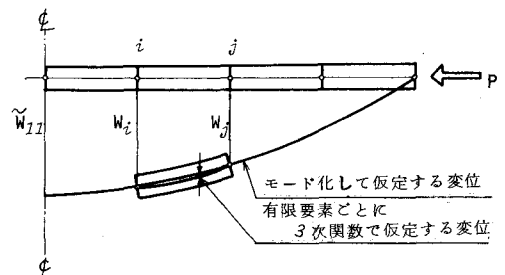


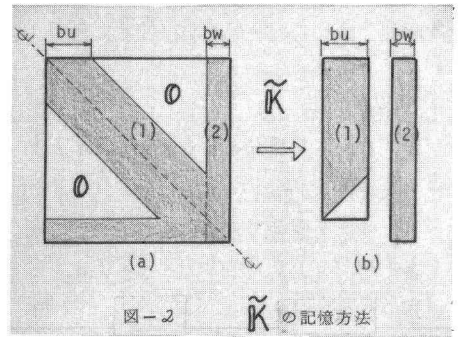
図-1. 変位のモード化

3] 数値解析例

数値解析例として、初期たわみを有する周辺単純支持の圧縮板の極限強度解析を取り上げる。解析において面内変位はすべて有限要素ごとに一定ひずみの変位関数により仮定する。又、節点変位の面外方向成分は、以下に示すLevy形の変位関数を用いる。ただし、有限要素内の面外方向変位は、従来の有限要素法同様、3次関数で仮定することに変わりはない。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{w} &= \Delta \tilde{w}_{11} \cdot \cos \frac{\pi X}{a} \cdot \sin \frac{\pi Y}{b} + \Delta \tilde{w}_{13} \cdot \cos \frac{\pi X}{a} \cdot \sin \frac{3\pi Y}{b} + \Delta \tilde{w}_{31} \cdot \cos \frac{3\pi X}{a} \cdot \sin \frac{\pi Y}{b} + \dots \\ \Delta \tilde{\theta}_x &= -\Delta \tilde{w}_{11} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \cos \frac{\pi X}{a} \cdot \cos \frac{\pi Y}{b} - \Delta \tilde{w}_{13} \cdot \frac{3\pi}{b} \cdot \cos \frac{\pi X}{a} \cdot \cos \frac{3\pi Y}{b} - \Delta \tilde{w}_{31} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \cos \frac{3\pi X}{a} \cdot \cos \frac{\pi Y}{b} - \dots \\ \Delta \tilde{\theta}_y &= -\Delta \tilde{w}_{11} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \sin \frac{\pi X}{a} \cdot \sin \frac{\pi Y}{b} - \Delta \tilde{w}_{13} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \sin \frac{\pi X}{a} \cdot \sin \frac{3\pi Y}{b} - \Delta \tilde{w}_{31} \cdot \frac{3\pi}{a} \cdot \sin \frac{3\pi X}{a} \cdot \sin \frac{\pi Y}{b} - \dots \end{aligned} \right\} (10)$$

以上のような変位関数を用いて解析すると、式(7)の剛性マトリックス \tilde{K} は、図-2(a)の薄壁部分に数値が入ってくる。対称性を利用して、これを図-2(b)に示すようにバンド状に記憶させ、コレスキー法を用いて式(7)の計算を可能にし、自由度の低減をはかった。このようにして解析した結果を図-3、表-1に示す。



4] 考察

本解析法による結果と以前著者が有限要素法のみを用いて解析した場合の結果との比較を行う。式(10)における級数の項数(NWN)を1, 3, 4, 6とした場合の解析結果を図-3、表-1に示す。弾塑性座屈を起す領域の板 ($\sigma_y = 2,400 \text{ kg/cm}^2$) の方が弾性座屈を起す領域の板 ($\sigma_y = 6,000 \text{ kg/cm}^2$) よりも収束が良い。これは、極限状態における板のたわみが、後者に比し前者の方が小さいためと考えられる。しかしいずれの板でも、NWN=3にすれば十分な精度の解が得られることがわかる。なお、有限要素法の場合の全系の自由度は245、本解析法でNWN=3の場合は101とかなり自由度の低減が期待できる。又、解析に要した計算時間については、講演当日詳しく説明する予定である。

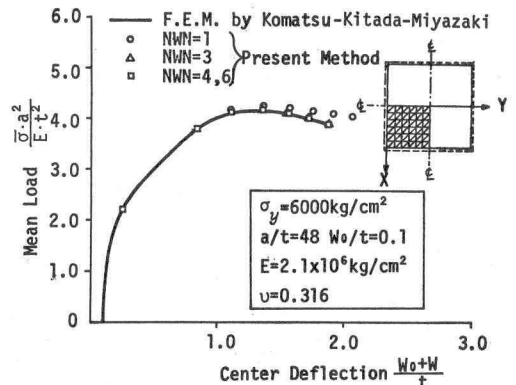


図-3 平均圧縮応力と中央たわみの関係

表-1 級数の項数と精度の関係

	NWN	$\Delta w_{i,j}$	$\bar{\sigma}_m$ (kg/cm ²)	Error (%)	σ_m (kg/cm ²)	Error (%)
F.E.M. (1)			3782.0	—	2327.4	—
Present Method	1	11 ($i=1, j=1$)	3875.8	2.48	2334.9	0.32
	3	11, 13, 31	3807.2	0.66	2332.9	0.24
	4	11, 13, 31, 33	3800.0	0.48	2332.2	0.21
	6	11, 13, 31, 33, 15, 51	3799.1	0.45	2332.2	0.21
$\bar{\sigma}_m$: 平均圧縮応力度の最大値			$\sigma_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$	$b/t = 48.0$	$\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$	$b/t = 40.0$
			$W_0/t = 0.1$			

5] あとがき

最後に、数値計算にあたり、本学修士2年生の宮崎清司君の協力を得たことを付記し、感謝の意を表します。

参考文献

- [1] 小松・北田・宮崎: 残留応力および初期たわみを有する圧縮板の極限強度解析, 第29回年次学術講演会講演概要集, P.268, 昭和49年10月。