

大阪大学工学部 正員 前田幸雄  
大阪府立高専 正員 〇日笠隆司

1. まえがき

本文は四辺単純支持の矩形の板要素及び補剛板の幾何学的非線形問題について、初期撓み・残留応力度を考慮し、理論的に取り扱う。解析モデルは板より補剛材を切りはなし、補剛材の拘束力がパルス(pulse)として、一枚の板の中立面に作用するとする。又、残留応力度は折れ線近似とする。考え方は Levy<sup>1)</sup>, Coan<sup>2)</sup>, ハ巻氏<sup>3)</sup>より、解析はガラキーン法<sup>4)</sup>による。数値計算は均一圧縮の板要素について示す。

2. 解析

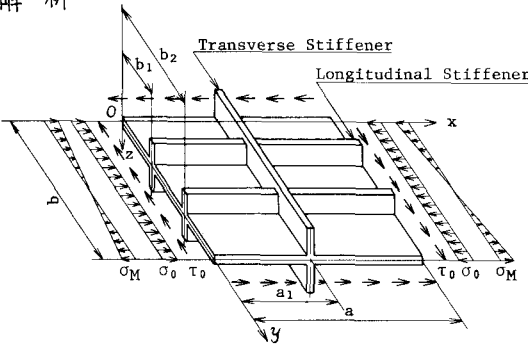


Fig. 1 Coordinates and Edge-Loading on Stiffened Plate

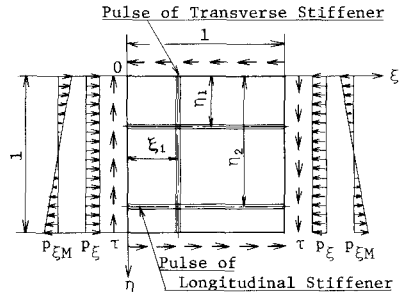


Fig. 2 Non-Dimensional Representation of Coordinates and Edge-Loading

Fig. 1に補剛材の座標及び荷重状態を示す。Fig. 2はFig. 1をモデル化し、無次元化したものである。補剛材を分離し、一枚の板の中立面に補剛材の拘束パルスが作用するとして示す。

拘束パルスを考慮に入れ、板の有限変形に関して、Kármán, Marguerreが誘導した平衡方程式・適合条件式を用い、無次元化すると次式のように表わされる。

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial \eta^4} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{n=1}^{NL} \left\| \frac{b}{t_{L,n}} \delta_{L,n} \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial \xi^2} \right\|_{\eta=\eta_n} + \sum_{n=1}^{NT} \left\| \frac{b}{t_{T,n}} \delta_{T,n} \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right\|_{\eta=\eta_n} + \sum_{n=1}^{NT} \left\| \frac{a}{t_{T,n}} \delta_{T,n} \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial \eta^2} \right\|_{\xi=\xi_n} + \beta^2 \sum_{n=1}^{NT} \left\| \frac{a}{t_{T,n}} \delta_{T,n} \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial \eta^2} \right\|_{\xi=\xi_n} = 12(1-\nu^2) \left\{ \rho + \frac{\partial(\Phi+\bar{\Phi})}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(\Phi+\bar{\Phi})}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial(\Phi+\bar{\Phi})}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \sum \left\| \frac{b}{t_{L,n}} \delta_{L,n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right\|_{\eta=\eta_n} + \sum_{n=1}^{NT} \left\| \frac{a}{t_{T,n}} \delta_{T,n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right\|_{\xi=\xi_n} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^4} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right\} \quad (2)$$

[記号の説明]  $b$  = 板巾,  $a$  = 板の長さ,  $t$  = 板厚(添字L:縦リジ, 添字T:横リジ),  $W$  = 撓み(添字0:初期撓み),  $\beta = a/b$ ,  $i = b/t$ ,  $x \cdot y \cdot z \cdot a_n \cdot b_n$ : Fig. 1参照,  $\xi \cdot \eta = x/a \cdot y/b$ ,  $w = w/t$ ,  $w_0 = w_0/t$ ,  $\xi_n \cdot \eta_n = a_n/a \cdot b_n/b$ , (1)式中のカッコ||は $\eta=\eta_n$  ( $\xi=\xi_n$ )における $t_{L,n}/b$  ( $t_{T,n}/a$ )なる矩形パルス関数を示す。  $\delta_{L,n} = E I_{L,n} / D b$ ,  $\delta_{T,n} = G J_{T,n} / D b$ ,  $\delta_{G T,n} = G J_{T,n} / D a$ ,  $\delta_{T,n} = E I_{T,n} / D a$ ,  $\rho = \alpha^2 \beta^2 / E t^4 \cdot P_0$ ,  $P_0$  = z方向の分布荷重,  $\Phi = F / E t^2$  (添字0:初期応力度を示す, なお  $\bar{\Phi}$  は面内変位によるものとする),  $F$  = エアリーの応力関数,  $\delta_{L,n} = A_{L,n} / b t$ ,  $\delta_{T,n} = A_{T,n} / a t$ ,  $A$  = リジの断面積,  $NL$  = 縦リジの本数,  $NT$  = 横リジの本数,  $D = E t^3 / 12(1-\nu^2)$ ,  $J = \pi J^2 / 4$  の換り係数,  $\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta \cdot \tau_{\xi\eta}$  = 無次元の膜応力度,  $\sigma_\xi = \partial^2 \Phi / \partial \eta^2 = b^2 / E t^2 \cdot \sigma_x = (b/t \sqrt{\sigma_x} / E)^2 \cdot \sigma_x / \tau_y$ ,  $\sigma_\eta = \partial^2 \Phi / \partial \xi^2 = a^2 / E t^2 \cdot \sigma_y$ ,  $\tau_{\xi\eta} = -\partial^2 \Phi / \partial \xi \partial \eta = ab / E t^2 \cdot \tau_{xy} = \beta (b/t \sqrt{\tau_{xy}} / E)^2 \cdot \tau_{xy} / \tau_y$ ,  $\sigma_0 \cdot \sigma_M \cdot \tau_0$  = 単位面積当たりの軸荷重・モーメント荷重・剪断荷重 (Fig. 1),  $P_0 = b^2 / E t^2 \cdot \sigma_0$ ,  $P_{EM} = b^2 / E t^2 \cdot \sigma_M$ ,  $\tau = ab / E t^2 \cdot \tau_0$ ,  $P_{ET}$  = 残留応力度が0の辺の座屈荷重,  $M, K, M_0, N_0$  = 撓みを二重フーリエ級数に展開したときの最大項。

四辺単純支持の無次元化初期撓み及び任意の撓みを

$$w_0 = \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} a_{0mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$$

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (3)$$

とする。\$a\_{0mn}\$は初期撓み\$\kappa\$よって与えられる既知係数であり、\$w\$は未知係数\$a\_{mn}\$を含む二重フーリエ級数\$\kappa\$よって

$$B_{pq} = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \text{Sign} \frac{\beta^2}{4(p^2 + \beta^2 q^2)^2} \{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 - (k_1)^2 (k_4)^2\} A_{rs} A_{tu} \quad (5)$$

(但し、\$r=|k\_1|\$, \$s=|k\_2|\$, \$t=|k\_3|\$, \$u=|k\_4|\$)

て展開したものである。

無次元化応力関数系を基本解系と特解系の和で表わし、(2)式\$\kappa\$(3)式を代入すると、\$\Phi\_2\$は

$$\Phi_2 = \sum_p \sum_q (B_{pq} - B_{0pq}) \cos p\pi\xi \cos q\pi\eta \quad (4)$$

となる。(4)式中の\$B\_{pq}\$は下記の(5)式及びTable-1\$\kappa\$示す。

Table 1

k1	k2	k3	k4	Sign	p		q		i		j	
					Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max
i	j	p-i	q-j	+	2	2M	2	2N	1 (p≤M), p-M (p>M)	p-1 (p≤M), M (p>M)	1 (q≤N), q-N (q>N)	q-1 (q≤N), N (q>N)
i	j	p-i	q-j	-	2	2M	1	N-1	1 (p≤M), p-M (p>M)	p-1 (p≤M), M (p>M)	1+q	N
i	q-j	p-i	j	-	2	2M	0	N-1	1 (p≤M), p-M (p>M)	p-1 (p≤M), M (p>M)	1+q	N
i	j	p-i	q-j	-	1	M-1	2	2N	1+p	M	1 (q≤N), q-N (q>N)	q-1 (q≤N), N (q>N)
i	j	p-i	q-j	+	1	M-1	0	N-1	1+p	M	1+q	N
i	q-j	p-i	j	+	0	M-1	1	N-1	1+p	M	1+q	N
p-i	j	i	q-j	-	0	M-1	2	2N	1+p	M	1 (q≤N), q-N (q>N)	q-1 (q≤N), N (q>N)
p-i	j	i	q-j	+	0	M-1	1	N-1	1+p	M	1+q	N
p-i	q-j	i	j	+	1	M-1	0	N-1	1+p	M	1+q	N

\$B\_{0pq}\$も同様\$\kappa\$示される。

応力関数\$\kappa\$関する境界条件は次の通りである。

- 1) 剪断応力度は支持四辺で一一定である(uniform stress)とし、支持四辺の剪断荷重による変位は直線的でなくとする。
  - 2) Fig. 2\$\kappa\$示す\$P\_x, P\_{xM}\$の作用する相対辺の変位は直線的である(uniform displacement)とする。
- (2)式の余関数系は(4)式の特解系\$\kappa\$基本解系をプラスし、上記の2条件を満足するよう(6)式のように表わされる。

$$\Phi = \frac{P_{xM}}{3} \eta^3 - \frac{1}{2} (P_x M + P_x) \eta^2 - \tau \xi \eta + \sum_p \sum_q (B_{pq} - B_{0pq}) \cos p\pi\xi \cos q\pi\eta$$

$$+ \sum_p (A_p \cosh p\pi\beta \eta + B_p p\pi\beta \eta \cosh p\pi\beta \eta + C_p \sinh p\pi\beta \eta + D_p p\pi\beta \eta \sinh p\pi\beta \eta) \cos p\pi\xi \quad (6)$$

(6)式の\$A\_p, B\_p, C\_p, D\_p\$は次の条件(7), (8), (9), (10)より(11)式のように表わされる。

\$\circ\$ \$x\$方向の全荷重\$P\_x\$は一定である。

$$P_x = \frac{E t^3}{b} \int_0^1 \sigma_x d\eta = \text{一定} \quad (7)$$

\$\circ\$ \$\eta=0, 1\$のとき、常に\$\sigma\_\eta=0\$である。 (8)

$$B_p = \sum_q \frac{(B_{pq} - B_{0pq}) (\cosh p\pi\beta \sinh p\pi\beta + p\pi\beta) - (B_{pq} - B_{0pq}) \cos q\pi (\pi\beta \cosh p\pi\beta + \sinh p\pi\beta)}{(p\pi\beta)^2 - \sinh^2 p\pi\beta}$$

\$\circ\$ \$y\$方向の全荷重\$P\_y\$は0である。

$$P_y = \frac{E t^3}{a} \int_0^1 \sigma_y d\eta = 0 \quad (9)$$

\$\circ\$ \$\xi=0, 1\$及び\$\eta=0, 1\$のとき、常に\$\tau\_{xy}=\tau\$である。 (10)

$$D_p = \sum_q \frac{(B_{pq} - B_{0pq}) p\pi\beta \cos q\pi \sinh p\pi\beta - (B_{pq} - B_{0pq}) \sinh^2 p\pi\beta}{(p\pi\beta)^2 - \sinh^2 p\pi\beta}, \quad \left. \begin{aligned} A_p &= \sum_q (B_{pq} - B_{0pq}) \\ C_p &= -B_p \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

撓み\$w\$及び\$\kappa\$応力関数系は(3), (5), (6), (11)式\$\kappa\$示すように、未知係数\$a\_{mn}\$よって表わされる。撓み関数\$w\$の未知係数\$\kappa\$関して、(1)式\$\kappa\$ガラーキン法を適用すると、未知係数\$a\_{mn}\$関する\$(M \times N)\$個の三次代数方程式群を得る。また、ニュートンラフソン法\$\kappa\$より、線形の代数方程式\$\kappa\$変換し、マトリックス表示する。撓み関数の最大項\$Q\_{MN}\$を必要精度の解が求まるよう\$\kappa\$きめ(マトリックスの次数は\$M \times N\$)、初期値を与え、くり返し演算\$\kappa\$行って、未知係数\$a\_{mn}\$は求められる。応力度は(6)式の応力関数より計算出来る。三次代数方程式群をニュートンラフソン法\$\kappa\$より、線形の代数方程式\$\kappa\$しているため、初期値の与え方\$\kappa\$よって、求めた解が必要とする解でない場合もあり得る。本文では荷重を漸次増加させ、求めた解と解析\$\kappa\$ありて必要としている解が一致するよう\$\kappa\$する。初期値の推定は前段階までの解を二次放物線\$\kappa\$よって近似し、演算回数を減少させている。なお、二次放物線の軸は荷重軸をとる。

### 3. 数値計算結果

板要素についての計算結果を示す。Fig. 3は荷重と中央点の撓みの関係を図示し、Coanの計算結果<sup>2)</sup>と比較している。Table-2には頂数  $M \times N$  (マトリックスの次数) = 1, 4, 9 について、荷重と中央点の撓みの関係が示されている。撓み関数の一項のみで、十分な精度が得られることが分る。また、初期撓み  $Q_{011} = 0.1$ 、残留応力度比  $\sigma_R/\sigma_Y = 0.2$ 、 $b/t\sqrt{\sigma_Y/E} = 2.366$  (S41では  $b/t = 70K$  相当) のときが Fig. 3に示されている。残留応力度が影響していることが分る。Fig. 4は荷重比  $P_x/P_{xcr} = 1.055$ 、 $Q_{011} = 0.1$ 、 $\sigma_R/\sigma_Y = 0$ 、 $\beta = 1$ 、 $\nu = 0.316$  のとき、無次元化応力度  $\sigma_\xi (= b^2/E \epsilon \sigma_x)$  の変化状態を示したものである。Table-3は  $\beta = 1$ 、 $\nu = 0.3$ 、 $b/t\sqrt{\sigma_Y/E} = 1.352$  (道示では 1.31~1.35)  $Q_{011} = 1/150$  (道示での限界値)、 $1/300$ 、 $\sigma_R/\sigma_Y = 0.3$  のとき、中央点の撓みと  $\sigma_\xi$  の関係を表わしている。本弾性解析ではこの程度の初期不整は、この荷

Table 2 Net Center Deflection Ratios

( $\beta = 1, \nu = 0.316, a_{011} = 0.1, \sigma_R/\sigma_Y = 0$ )

$P_\xi$	$P_x/P_{xcr}$	$w - w_0$ ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ )			
		Coan's	Authors'		
			M=1, N=1	M=2, N=2	M=3, N=3
2.2368	0.612	0.150	0.1499	0.1499	0.1496
3.8558	1.055	0.762	0.7624	0.7620	0.7632
5.1241	1.402	1.341	1.327	1.323	1.342

Table 3 Central Net Deflection Ratios and Non-dimensional Membrane Stresses

( $b/t\sqrt{\sigma_Y/E} = 1.352, \nu = 0.3$ )

$P_x/P_Y$	$P_x/P_{xcr}$	$w - w_0$ ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ )			
		$a_{011} = 1/150$		$a_{011} = 1/300$	
		$\sigma_R/\sigma_Y = 0$	$\sigma_R/\sigma_Y = 0.3$	$\sigma_R/\sigma_Y = 0$	$\sigma_R/\sigma_Y = 0.3$
0.9	0.4552	$5.5699 \times 10^{-3}$	$9.680 \times 10^{-3}$	$2.7852 \times 10^{-3}$	$4.8408 \times 10^{-3}$
0.95	0.4805	$6.6185 \times 10^{-3}$	$1.0759 \times 10^{-2}$	$3.0832 \times 10^{-3}$	$5.3806 \times 10^{-3}$
1.0	0.5058	$6.8226 \times 10^{-3}$	$1.1991 \times 10^{-2}$	$3.4116 \times 10^{-3}$	$5.9968 \times 10^{-3}$

$P_x/P_Y$	$\sigma_\xi$ ( $\eta = 0, a_{011} = 1/150, \sigma_R/\sigma_Y = 0.3$ )				
	$\xi = 0$	$\xi = 0.1$	$\xi = 0.2$	$\xi = 0.3$	$\xi = 0.5$
1.0	1.8286	1.8287	1.8289	1.8291	1.8293

Table 4 Effect of Initial Imperfections

( $P_x/P_Y = 1.0, a_{011} = 0.1, \beta = 1, \nu = 0.316$ )

$\sigma_R/\sigma_Y$	$\sigma_\xi$ ( $\eta = 0$ )					
	$\xi = 0$	$\xi = 0.1$	$\xi = 0.2$	$\xi = 0.3$	$\xi = 0.4$	$\xi = 0.5$
0	1.8290	1.8356	1.8526	1.8736	1.8907	1.8972
0.2	1.8301	1.8406	1.8681	1.9021	1.9297	1.9402

$\sigma_R/\sigma_Y$	$\sigma_\xi$ ( $\xi = 0$ )					
	$\eta = 0$	$\eta = 0.1$	$\eta = 0.2$	$\eta = 0.3$	$\eta = 0.4$	$\eta = 0.5$
0	1.8290	1.8502	1.8420	1.8226	1.8051	1.7982
0.2	1.8301	1.8642	1.8510	1.8196	1.7982	1.7802

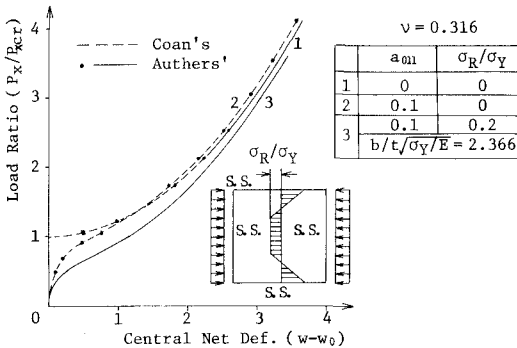


Fig. 3 Load Ratio versus Deflection Ratio

重段階から、影響していないことが分る。Table-4に  $P_\xi = 1.8247$  ( $P_x/P_Y = 1$ )、 $\beta = 1$ 、 $\nu = 0.316$ 、 $b/t\sqrt{\sigma_Y/E} = 1.352$ 、 $Q_{011} = 0.1$ 、 $\sigma_R/\sigma_Y = 0, 0.2$  のときの  $\sigma_\xi$  の変化の状態が示されている。初期撓みの大きい場合についての計算結果ではあるが、初期撓み・残留応力  $K_F$ 、 $\sigma_\xi$  が変化していることが分る。

### 4. 結 論

残留応力と初期撓みとを有する四辺単純支持の板要素及び補剛板の弾性有限変形問題をガラーキン法により解析したものである。本解法の特長は小次数のマトリックス演算で高精度の解を得ることができ、又、撓み形状等の簡単なモデル化から、構造特性を把握することができている。数値計算に際し、大阪大学工学部林講師より適切な助言を頂いた。ここに記して謝意を表す。

1) Levy, S. : NACA, TN No. 846, 1942. 2) Coan, J.M. : J. Appl. Mech., Vol. 18, 1951. 3) Yamaki, N. : J. Appl. Mech., Vol. 26, 1959

4) 前田, 林, 中村 : 増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法, 工学会論文報告集, 第223号, 1974.