I-51　急速圧縮軸力下の弾塑性単純ばりの動的不安定現象について

九州大学.工.正員　太田俊昭
九州大学.工.正員　○今井富士夫

1. 序　はりが、衝撃に近い急速な軸圧縮力を受ける場合の弾塑性応答、なかんずく動的弾塑性不安定挙動は、直下型地震を受ける場合の構造物の柱や、吊橋主塔の予想される破壊パターンと何んらかの関わりがあるように思われる。本研究は、このような問題を解明しうる基礎理論を確立するため、その第1段階としてこれらと類似の現象である初期たわみを有する単純支持ばりが両端に急速な圧縮変形を受ける場合の不安定問題、いわゆるHoff's problem[1]について解析と理論照査を行ない、あわせて圧縮速度，細長比等の弾塑性応答に及ぼす効果について検討を行うものとする。

2. 解析理論　図-1に示す初期たわみを伴った単純ばりが、圧縮軸力Pを受けて弾塑性変形を生じたとする。はりの単位長さ当たりの質量をm，はりの初期たわみをy^i，変形によるたわみをYとすると、全たわみは $y=y^i+Y$，さらにはりをn等分割すれば、全分割点の曲げモーメントMと軸力Nは、水平，鉛直方向の慣性力 $g_x=-m\ddot{x}$，$g_y=-m\ddot{y}$ の影響を考慮すれば、次式となる。

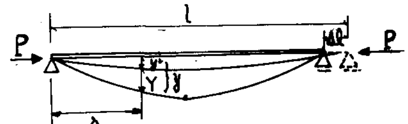


図-1

$$\mathbf{M}=P\mathbf{y}+\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{g}_y+\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{g}_x \qquad \text{------(1)}$$

$$\mathbf{N}=P\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{g}_y+\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{g}_x \qquad \text{------(2)}$$

ただし、$\mathbf{g}_y=-\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}}$，$\mathbf{g}_x=-\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}$ で$\mathbf{m}$は質量マトリックス，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\delta}$は、係数マトリックス
さて、曲率$\boldsymbol{\phi}$と曲げモーメント、ならびに軸ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}_c$と軸力は、文献（2）より

$$\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\eta}\mathbf{M}+\boldsymbol{\phi}^p \qquad (\boldsymbol{\phi}^p;\text{塑性曲率Vector}) \qquad \text{------(3)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c=\boldsymbol{\zeta}\mathbf{N}+\boldsymbol{\varepsilon}_c^p \qquad (\boldsymbol{\varepsilon}_c^p;\text{塑性軸ひずみ（図心点）Vector}) \qquad \text{------(4)}$$

また、変形の適合条件式は、φ－法公式より

$$\mathbf{y}=\mathbb{a}\boldsymbol{\phi}+\mathbf{y}^i \qquad (\mathbf{y}^i;\text{初期たわみVector}) \qquad \text{------(5)}$$

$$\mathbf{x}=\mathbb{b}\boldsymbol{\varepsilon}_c \qquad \text{------(6)}$$

式（5），（6）に式（3），（4）を代入して

$$\mathbf{y}=\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\mathbf{M}+\mathbb{a}\boldsymbol{\phi}^p+\mathbf{y}^i \qquad \text{------(7)}$$

$$\mathbf{x}=\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\mathbf{N}+\mathbb{b}\boldsymbol{\varepsilon}_c^p \qquad \text{------(8)}$$

さらに、式（1），（2）を代入すれば、それぞれ次式をえる。

$$\mathbf{y}=P\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\mathbf{y}+\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{g}_y+\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{g}_x+\mathbb{a}\boldsymbol{\phi}^p+\mathbf{y}^i$$

$$\mathbf{x}=P\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta}+\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{g}_y+\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{g}_x+\mathbb{b}\boldsymbol{\varepsilon}_c^p$$

上の2式を整理して

$$\mathbf{y}=\mathbb{J}_1^{-1}(-\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}}-\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbb{a}\boldsymbol{\phi}^p+\mathbf{y}^i) \qquad (\text{ここに}\ \mathbb{J}_1=\mathbb{I}-P\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}) \text{----(9)}$$

$$\mathbf{x}=-\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}}-\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbb{b}\boldsymbol{\varepsilon}_c^p+P\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta} \qquad \text{------(10)}$$

ここで、変形成分$\mathbf{y}$，$\mathbf{x}$を一括して$\mathbf{v}$で表わせば、式（9），（10）は、

$$\mathbf{v}=-\mathbb{S}\ddot{\mathbf{v}}+\mathbb{L} \qquad \text{------(11)}$$

ただし、
$$\mathbb{S}=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{J}_1^{-1}\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{m} & \mathbb{J}_1^{-1}\mathbb{a}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{m}\\ \hline \mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{m} & \mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{m}\end{array}\right),\quad \mathbb{L}=\left(\begin{array}{c}\mathbb{J}_1^{-1}(\mathbb{a}\boldsymbol{\phi}^p+\mathbf{y}^i)\\ \hline \mathbb{b}\boldsymbol{\varepsilon}_c^p+P\mathbb{b}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta}\end{array}\right)$$

上式を線型加速度法などを用いて、時間積分を行なえば、非線形応答解析が可能となる。

ここでは、先ずその第1段階として、独立変数を y のみ考え、軸方向慣性力 $-m\ddot{u}$ の効果を無視した場合について考察することにする。

初期たわみを、$y^i = a\sqrt{I/A}\cdot\sin\frac{\pi s}{\ell}$（I；断面2次モーメント，A；断面積，$\ell$；スパン長）で想定すれば、外力Pは、一定速度Vの変形が自由端に加えられるときの圧縮力で与えられるので、次のようになる。

すなわち、軸圧縮量 $\Delta\ell$ は、

$$\Delta\ell = -Vt + \int\left\{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dy^i}{ds}\right)^2} - 1\right\}ds$$
$$\fallingdotseq -Vt + \frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dy^i}{ds}\right)^2\right\}ds \qquad \text{------------(12)}$$

一方、変形の適合条件より

$$\Delta\ell = \int\varepsilon_c\cos\theta\,ds = \int(\varsigma\cos\theta N + \varepsilon_c^p\cos\theta)ds = \int(-\varsigma\cos^2\theta P + \varepsilon_c^p\cos\theta)ds \quad (\because N = -P\cos\theta) \text{--(13)}$$

式（12），（13）より

$$-P\int\varsigma\cos^2\theta\,ds + \int\varepsilon_c^p\cos\theta\,ds = -Vt + \frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dy^i}{ds}\right)^2\right\}ds$$

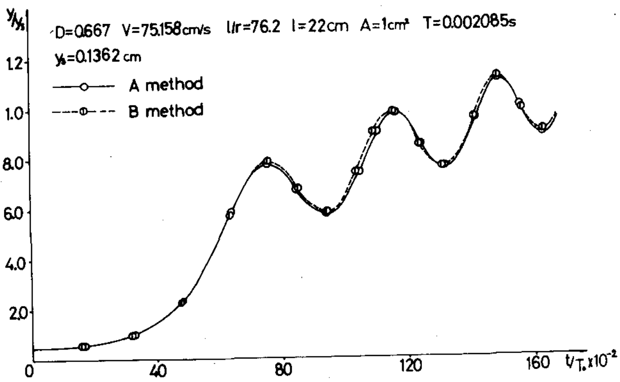
$$\therefore\ P = \frac{Vt}{\int\varsigma\cos^2\theta\,ds} - \frac{1}{2\int\varsigma\cos^2\theta\,ds}\int\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dy^i}{ds}\right)^2\right\}ds + \frac{\int\varepsilon_c^p\cos\theta\,ds}{\int\varsigma\cos^2\theta\,ds} \quad (\text{ただし、}\tan\theta = dy/ds) \text{--(14)}$$

この場合、はり、および断面を適当に分割して数値積分による計算を行う必要がある。そこで、分割数の計算精度におよぼす効果を検討するため、Hoff の弾性理論解と照査してみた。はりの分割数を10等分した場合の本計算とHoffの解を比較したy，およびPの応答図が、図－2、および図－3である。図中のA-法は本法，B-法はHoff の理論によるものである。両者は、かなりよく合致しており、はりの分割数は、10等分で十分であると思われる。ここに、図中Dは、文献（1）で用いられているDynamic similarity であり、次式で定義されている。

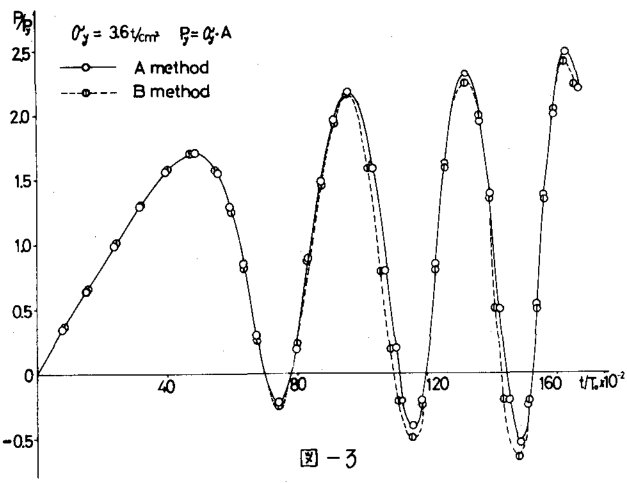
$$D = \frac{1}{\pi^4}\cdot\left(\frac{\ell}{r}\right)^3\cdot\frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \qquad (15)$$

ここに、$m = \rho A$，$r = \sqrt{I/A}$ である。

なお、弾塑性応答の場合については、講演時に報告する予定である。



図－2



図－3

〈参考文献〉

（1）. N.J. Hoff; The Dynamics of the Buckling of Elastic Columns, Journal of applied Mechanics, March, 1951

（2）T. Ohta and T. Yamasaki; Elasto-Plastic Analysis of Steel Structure Considering the Effect of Residual Stress and Finite Deformation, Proc. of JSCE, No, 194, 1971