

大阪大学 正員 小松定夫
 熊本大学 〃 崎元達郎

1) まえがき; 幾何学的非線形問題に材料の塑性化の影響を考慮する場合、応力-ひずみ関係が履歴に依存するため、全荷重または全変位を与えられても、つり合状態は一意的には求まらない。したがって、つり合方程式は、未知全変位を含む剛性マトリックスでは記述できない。さうに問題になるのは、ねじり剛性を含めた弾塑性部材の諸剛性をいかに評価算定するかという点であり、著者らは一手法を報告している。¹⁾本論では、この結果を基礎に、応力表示の初期応力接線剛性マトリックスを導き、これを増分的に解く。これより得られる応力増分の和として得られる全断面力と全外力が等しいという式をつり合条件とする。さうに、材料の降伏による影響は、部材の横分割と縦分割による方法を用いて追跡する。本法を用いて、任意形状分布の残留応力を有する任意形状閉断面からなる骨組の三次元的挙動と塑性領域の三次元的分布を明らかにすることができ、さうに発展させて、三次元骨組構造物の弾塑性座屈と塑性崩壊などの極限強度を算定することが可能である。²⁾

2) 解析上の仮定; i) 骨組は、完全弾塑性材料でできた薄肉閉断面部材で構成されている。ii) St. Venantのねじりが支配的で、そり拘束による影響は無視できる。iii) 断面の一部が塑性化した後も、曲げひずみは平面を保持する。iv) 曲げによるせん断応力の影響は無視する。v) von Misesの降伏条件が成立し、塑性域では、Prandtl-Reussの応力-ひずみ式が成立する。vi) 断面の一部が塑性化した後も、ねじりによるせん断流は同方向に一定であり、断面のねじり中心の位置も変化しない。vii) 変位は大きくても、ひずみは微小である。なお、以下の諸式では、記号の上に一を付したものは、全変位、全ひずみなどを表し、一を付さない通常の記号は、それらの増分量を表す。

3) 接線剛性マトリックス; σ i段階までに変形した構造部材の上に、右手系の局所座標 (s, y, z) を、次の荷重増分の後、変形した構造部材の上に $(\bar{s}, \bar{y}, \bar{z})$ を、断面のねじり中心 O を原素として、図-1のように定める。断面内の任意点の軸ひずみ増分は、部材軸の変位 u, v, w およびねじり角増分 ϕ' により

$$\epsilon = u' + \frac{1}{2} \{ (v')^2 + (w')^2 \} - (z - s\phi')v' - (y + z\phi')w' + \frac{1}{2} (z^2 + s^2) (\phi')^2 \quad (1)$$

と表せる。 i 状態での節点荷重を \bar{P} 、 $i+1$ 状態での節点荷重を $\bar{P} + P$ 、その間の節点変位増分を U とすると、外力ポテンシャルの増分 V は、次式で表される。

$$V = - \{ (\bar{u} + U)^T (\bar{P} + P) - \bar{u}^T \bar{P} \} = - U^T (\bar{P} + P) - \bar{u}^T P \quad (2)$$

i 状態での任意点の応力を $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ 、断面力の増分と変形の増分をそれぞれ

$$f = [N - M_y \ M_z \ M_s]^T, \quad d = [\epsilon_s \ -\psi_z \ \psi_y \ \phi']^T$$

とし、荷重増分中の線型性を仮定すると、内力のなす仕事の増分 Π は、

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L d^T f dx + \int_0^L \bar{\sigma} \epsilon dA + \int_0^L \bar{M}_s \phi' dx \quad (3)$$

となる。一ネ、断面力増分 f と変形増分 d の関係は、次式で与えられる。¹⁾

$$\begin{bmatrix} N \\ -M_y \\ M_z \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA_0 + \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} & E\bar{S}_z + \frac{C_3 C_4}{C_1 + C_2} & E\bar{S}_y + \frac{C_3 C_5}{C_1 + C_2} & \frac{C_3 C_6}{C_1 + C_2} \\ & EI_{z^2} + \frac{C_2^2}{C_1 + C_2} & EI_{yz} + \frac{C_4 C_5}{C_1 + C_2} & \frac{C_4 C_6}{C_1 + C_2} \\ & & EI_{y^2} + \frac{C_2^2}{C_1 + C_2} & \frac{C_5 C_6}{C_1 + C_2} \\ & & & \frac{C_4 C_6}{C_1 + C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ -\psi_z \\ \psi_y \\ \phi' \end{bmatrix}$$

Sym.

ここに、

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^L dA, \quad S_z = \int_0^L z dA, \quad S_y = \int_0^L y dA, \quad I_3 = \int_0^L r^2 dA \\ I_{yz} &= \int_0^L yz dA, \quad I_y = \int_0^L y^2 dA, \quad I_z = \int_0^L z^2 dA, \quad I_5 = \frac{(\int_0^L r ds)^2}{\int_0^L \frac{1}{r} ds} \\ C_1 &= \frac{1}{G} \int_0^L \frac{1}{r} ds, \quad C_2 = \frac{1}{E} \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial s} \right)^2 \frac{ds}{r}, \quad C_3 = \int_0^L \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial s} ds, \\ C_4 &= \int_0^L \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial s} y ds, \quad C_5 = \int_0^L \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial s} z ds, \quad C_6 = - \int_0^L \bar{\tau}_s ds. \end{aligned}$$

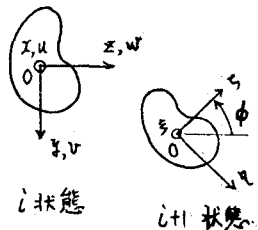
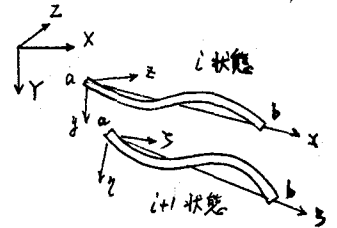


図-1 座標系

または、 $f = [A_e + A_p] \cdot d = A \cdot d$ (4)

式(3)に式(1)および(4)を代入すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L d' \Delta d dx + \int_0^L \bar{N} \left\{ u' + \frac{1}{2}(v')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 \right\} dx + \int_0^L \bar{M}_2 (v'' + \phi w') dx \\ & - \int_0^L \bar{M}_2 (w'' - \phi v') dx + \frac{1}{2} \int_0^L \bar{T} (\phi')^2 dx + \int_0^L \bar{M}_3 \phi' dx \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $\bar{N} = \int_A \sigma dA$, $\bar{M}_2 = -\int_A \sigma l dA$, $\bar{M}_1 = \int_A \sigma s dA$, $\bar{T} = \int_A \sigma (v' s') dA$, $\bar{M}_3 = \int_A \sigma l r s dA$

次に、 x 軸方向の任意点の変位増分を、 u, ϕ については、 x の一次式、 v, w については、 x の三次式で近似する。さらに、断面力の x 方向分布については、 $\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}_3$ は x 軸方向に一定、 \bar{M}_1, \bar{M}_2 は、 x の一次式で近似する。最終的に系のポテンシャルエネルギーの増分 $\pi = \Pi + V$ は、節点変位増分 U で表示され、 U による変分をとると、次式のつり合方程式を得る。

$$[K_e + K_p + K_g] \cdot U = P - (f - \bar{p}) \quad (6)$$

ここに、

$$\begin{aligned} U = & \{ u_a \ v_a \ w_a \ \phi_a \ -w'_a \ u'_a \ u'_b \ v'_b \ w'_b \ \phi_b \ -w'_b \ v'_b \}^T \\ \phi = & \{ P_{2a} \ P_{2b} \ P_{2c} \ M_{1a} \ M_{1b} \ M_{1c} \ P_{2b} \ P_{2c} \ M_{2b} \ M_{2c} \ M_{2b} \ M_{2c} \}^T \\ \bar{p} = & \{ \bar{P}_{2a} \ \bar{P}_{2b} \ \bar{P}_{2c} \ \bar{M}_{1a} \ \bar{M}_{1b} \ \bar{M}_{1c} \ \bar{P}_{2b} \ \bar{P}_{2c} \ \bar{M}_{2b} \ \bar{M}_{2c} \ \bar{M}_{2b} \ \bar{M}_{2c} \}^T \\ f = & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{N}_a + \bar{N}_b}{2} \quad \frac{\bar{M}_{2a} - \bar{M}_{2b}}{l} \quad \frac{\bar{M}_{1a} - \bar{M}_{1b}}{l} \quad \frac{\bar{M}_{1a} + \bar{M}_{1b}}{2} \quad \bar{M}_{2a} \quad \bar{M}_{2b} \\ \frac{\bar{N}_a + \bar{N}_b}{2} \quad \frac{\bar{M}_{2a} - \bar{M}_{2b}}{l} \quad \frac{\bar{M}_{1a} - \bar{M}_{1b}}{l} \quad \frac{\bar{M}_{1a} + \bar{M}_{1b}}{2} \quad \bar{M}_{2a} \quad \bar{M}_{2b} \end{array} \right\}^T \end{aligned}$$

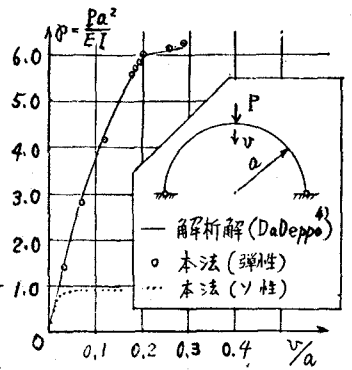


図-1 荷重-変位曲線

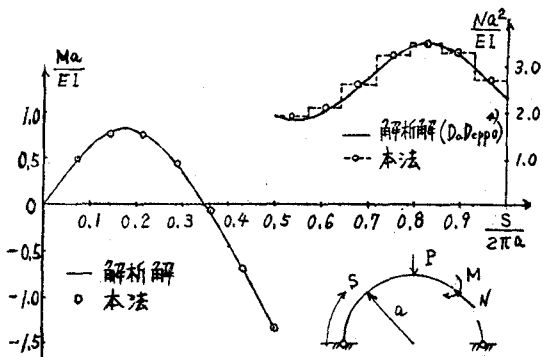


図-3 軸力と曲げモーメントの軸方向変化

4) 数値計算例；半円弧2-ヒンジアーチが拱頂に集中荷重を受けて大たわみ座屈を起こす場合の荷重-変位曲線、変形モード、断面力の変化、塑性域の分布を計算し図-1～図-4に示す。部材分割数14、断面分割数48で修正Newton-Raphson法を用いた荷重増分法で行った。その他の計算例については、当日発表の予定である。本研究は79年度科研費(奨励)を受けた。

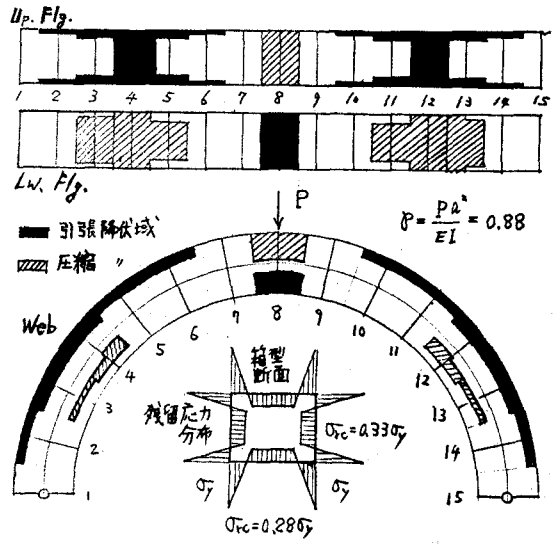


図-4 塑性域の分布(箱型断面)

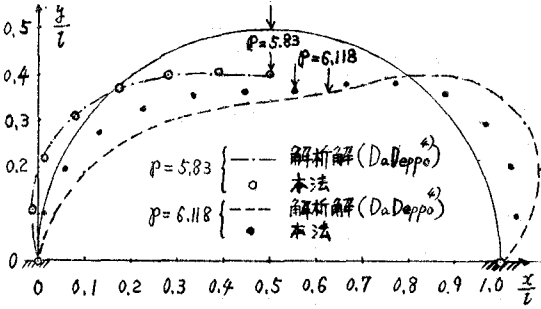


図-2 変位モード

<参考文献>

- 1) Komatsu, S & T. Sakimoto "Elasto-plastic Behavior of Thin-walled Steel Tubes..." Trans. of JSCE, No.235, 1995.
- 2) Bazant, Z.P. & M.E. Nimeiri "Large-Deflection Spatial Buckling..." Jour. of ASCE, EM6, Dec., 1973.
- 3) 小松、靖元 "閉断面を有する三次元骨組の非線形解析、土木学会論文報告集(投稿中)"
- 4) DaDeppo, D.A. & R. Schmidt "Nonlinear Analysis of Buckling and Postbuckling Behavior..." ZAMP, Vol.20, 1969.