I-48　弾性床上の棒の座屈の剛性マトリックス解析法について

北海道大学工学部　正員　渡辺 昇
岩手大学工学部　正員　○宮本 裕
岩手大学工学部　学生員　安彦敏郎

1．弾性床上の棒の座屈の剛性マトリックスを Anfang parameter 法によって誘導した。この剛性マトリックスを用いて弾性床上の棒の座屈荷重を求めたものである。

2．弾性床上の棒の座屈の剛性マトリックスの誘導

図-1 のような弾性床上の棒の座屈の微分方程式は $EIy'''' + Ny'' + ky = p(x)$ となるが，ℓ の区間に分布荷重 $p(x)$ を考えないときは式(1)のようになる。

$$EIy'''' + Ny'' + ky = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

いま $\gamma^2 = \dfrac{N}{4EI}$，$\delta^2 = \dfrac{k}{4EI}$ とおき

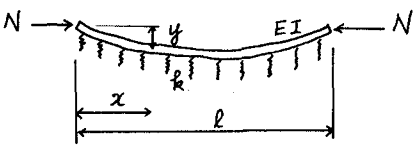


図-1

$\gamma^2 - \delta > 0$ のとき，さらに $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + \delta}$，$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \delta}$ とおくと式(1)の解はつぎのようになる。

$$EI\,y(x) = A_1 \sin\alpha x \cos\beta x + A_2 \cos\alpha x \sin\beta x + A_3 \cos\alpha x \cos\beta x + A_4 \sin\alpha x \sin\beta x, \quad \cdots \quad (2)$$

したがって

$$EI\,y'(x) = (-\alpha A_3 + \beta A_4)\sin\alpha x \cos\beta x + (-\beta A_3 + \alpha A_4)\cos\alpha x \sin\beta x + (\alpha A_1 + \beta A_2)\cos\alpha x \cos\beta x - (\beta A_1 + \alpha A_2)\sin\alpha x \sin\beta x, \quad \cdots \quad (3)$$

$$M(x) = -EIy''(x) = \{(\alpha^2+\beta^2)A_1 + 2\alpha\beta A_2\}\sin\alpha x \cos\beta x + \{2\alpha\beta A_1 + (\alpha^2+\beta^2)A_2\}\cos\alpha x \sin\beta x + \{(\alpha^2+\beta^2)A_3 - 2\alpha\beta A_4\}\cos\alpha x \cos\beta x + \{-2\alpha\beta A_3 + (\alpha^2+\beta^2)A_4\}\sin\alpha x \sin\beta x, \quad \cdots \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= -EIy'''(x) - Ny(x) \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\{(\alpha A_3 + \beta A_4)\sin\alpha x \cos\beta x - (\beta A_3 + \alpha A_4)\cos\alpha x \sin\beta x \\ &\quad + (-\alpha A_1 + \beta A_2)\cos\alpha x \cos\beta x + (-\beta A_1 + \alpha A_2)\sin\alpha x \sin\beta x\}, \end{aligned} \quad \cdots \quad (5)$$

そして境界条件 $x=0$ のとき $y(0), y'(0), M(0), Q(0)$ を与えて A_1, A_2, A_3, A_4 を求めることができる。そしてその A_1, A_2, A_3, A_4 を式(2)，(3)，(4)，(5)に代入しさらに $x=\ell$ とおくと式(6)のようになる。

$$\begin{bmatrix} y(\ell) \\ y'(\ell) \\ \dfrac{M(\ell)}{EI} \\ \dfrac{Q(\ell)}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \dfrac{M(0)}{EI} \\ \dfrac{Q(0)}{EI} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (6)$$

式(6)は $\delta = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$，$X = \begin{bmatrix} \dfrac{M}{EI} \\ \dfrac{Q}{EI} \end{bmatrix}$ とおくと，つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \delta(\ell) \\ X(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(0) \\ X(0) \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (7)$$

$\therefore$ $\left.\begin{aligned} \delta(\ell) &= K_{11}\delta(0) + K_{12}X(0), \\ X(\ell) &= K_{21}\delta(0) + K_{22}X(0) \end{aligned}\right\}$ これより $\left.\begin{aligned} K_{12}^{-1}\{\delta(\ell) - K_{11}\delta(0)\} &= X(0), \\ X(\ell) &= K_{21}\delta(0) + K_{22}K_{12}^{-1}\{\delta(\ell) - K_{11}\delta(0)\} \end{aligned}\right\}$

したがって $\left.\begin{aligned} X(0) &= -K_{12}^{-1}K_{11}\delta(0) + K_{12}^{-1}\delta(\ell), \\ X(\ell) &= (K_{21} - K_{22}K_{12}^{-1}K_{11})\delta(0) + K_{22}K_{12}^{-1}\delta(\ell) \end{aligned}\right\}$

$$\begin{bmatrix} X(0)\\ X(l)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{12}^{-1}K_{11} & K_{12}^{-1} \\ K_{21}-K_{22}K_{12}^{-1}K_{11} & K_{22}K_{12}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta(0)\\ \delta(l)\end{bmatrix} \quad \cdots \quad (8)$$

行列の各要素について計算するとつぎのようになる。ただしここではM, Q, y', y の符号の定義を図-2のように直した。またQ, Mの順序に改めた。

$$\begin{bmatrix} \frac{Q(0)}{EI} \\ \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \\ \frac{M(l)}{EI} \end{bmatrix} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2\sin^2\beta l-\beta^2\sin^2\alpha l}\begin{bmatrix} 2\alpha\beta(\beta\sin\alpha l\cos\alpha l+\alpha\sin\beta l\cos\beta l) & -(\beta^2\sin^2\alpha l+\alpha^2\sin^2\beta l) & -2\alpha\beta(\beta\sin\alpha l\cos\beta l+\alpha\cos\alpha l\sin\beta l) & -2\alpha\beta\sin\alpha l\sin\beta l \\ -(\beta^2\sin^2\alpha l+\alpha^2\sin^2\beta l) & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\sin\beta l\cos\beta l-\beta\sin\alpha l\cos\alpha l) & 2\alpha\beta\sin\alpha l\sin\beta l & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}(\beta\sin\alpha l\cos\beta l-\alpha\cos\alpha l\sin\beta l) \\ -2\alpha\beta(\beta\sin\alpha l\cos\beta l+\alpha\cos\alpha l\sin\beta l) & 2\alpha\beta\sin\alpha l\sin\beta l & 2\alpha\beta(\beta\sin\alpha l\cos\alpha l+\alpha\sin\beta l\cos\beta l) & (\beta^2\sin^2\alpha l+\alpha^2\sin^2\beta l) \\ -2\alpha\beta\sin\alpha l\sin\beta l & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}(\beta\sin\alpha l\cos\beta l-\alpha\cos\alpha l\sin\beta l) & (\beta^2\sin^2\alpha l+\alpha^2\sin^2\beta l) & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\sin\beta l\cos\beta l-\beta\sin\alpha l\cos\alpha l) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(l) \\ y'(l) \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (9)$$

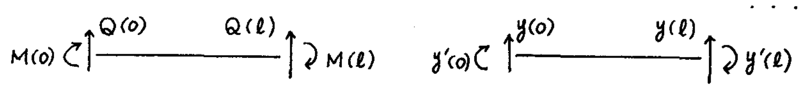
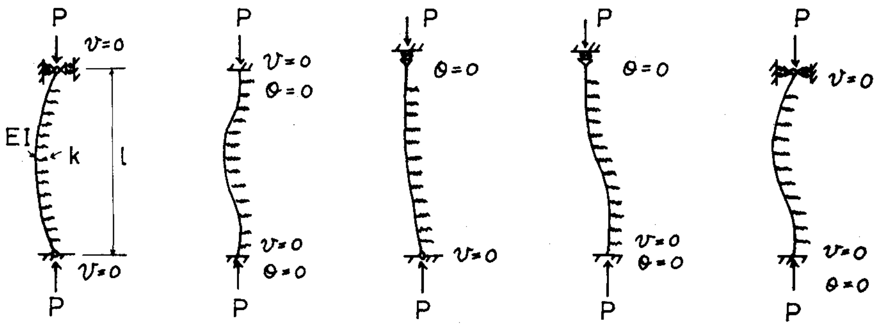


図-2

式(9)を用いて弾性床上の棒の座屈値を計算したのが図-3のとうりである。比較のため棒の座屈値を併記した。これは k=0 のときである。



(k=0)	$\frac{\pi^2}{l^2}EI$	$\frac{4\pi^2}{l^2}EI$	$\frac{\pi^2}{4l^2}EI$	$\frac{\pi^2}{l^2}EI$	$2.046\frac{\pi^2}{l^2}EI$
(k≠0)	$2\sqrt{k\cdot EI}$	$2\sqrt{kEI}+\frac{4\pi^2}{l^2}EI$	$2\sqrt{k\cdot EI}$	$2\sqrt{kEI}+\frac{\pi^2}{l^2}EI$	$2\sqrt{kEI}+\frac{\pi^2}{l^2}EI$
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

図-3

参考文献 1) Hetényi, M. : Beams on Elastic Foundations, Univ. of Michigan Press
2) 山田嘉明 : 塑性・粘弾性, 培風館, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A
3) 渡辺, 三浦, 宮本 : 弾性床上の桁の剛性マトリックス解析法について, 才29回講演概要集