

早稲田大学 正員 平嶋 政治
早稲田大学 学生員 〇依田 照彦

1.まえがき 薄肉構造部材の座屈安定に関する研究は数多くあり、それぞれの立場により結果において多少の差異が見られる。本報告では、変位法に基づく解析においては変位関数の仮定が重要であることに鑑み、従来の研究の仮定・その解釈・結果として得られた変位関数などを比較し、分岐形の安定方程式(座屈)の誘導に対して妥当な変位関数を検討するとともに、線形化有限変位理論の有効範囲について考察した。

2.従来の研究との比較 薄肉構造部材の座屈安定方程式の誘導に関する従来の研究を整理すると、若干の相違を無視すれば、次表のように分類できる。ただし、Lは線形項のみを意味し、Nは非線形項を含めた関係式を示す、又 $\bar{(\)}$ は中央面上の値を示し、 $(\)'$ はzに関する微分を意味する。その他の記号についてはVlasovの著書¹⁾に従った。(注) そりを表わす項に関して開閉両断面とも $\theta\omega$ に表現を統一した。

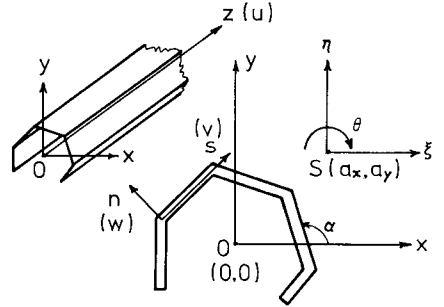


Fig.1 Coordinate System

表-1 従来の研究との比較

分類	基礎仮定	仮定の解釈	板厚中央面上の変位関数	基礎式の誘導方法	特徴	研究者
A	1)断面は剛である。 2)中央面のせん断変形はない。	1)面内変形は3つの独立変数 ξ, η, θ で表わせる。 2) $\bar{L} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$	a) $\bar{\xi}_s = \xi - (y - \alpha_y)\theta$ b) $\bar{\eta}_s = \eta + (x - \alpha_x)\theta$ c) $v = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \theta h$ d) $w = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + \theta t$ e) $u = \xi - \xi'x - \eta'y - \theta\omega$	座屈変形状態の幾何学的考察に基づくつり合い法	薄肉直線開断面部材の線形化有限変位理論	Vlasov, V. Z. 倉田 正嗣 Timoshenko, S. Goodier, J. N. 川井 虎彦 Roik, Carl-Lindner
B	1)断面は剛である。 2)中央面のせん断変形はない。	1)面内変形は3つの独立変数 ξ, η, θ で表わせる。 2) $\bar{L} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$	a) $\bar{\xi}_s = \xi - (y - \alpha_y)\theta$ b) $\bar{\eta}_s = \eta + (x - \alpha_x)\theta$ c) $v = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \theta h$ d) $w = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + \theta t$ e) $u = \xi - \xi'x - \eta'y - \theta\omega$	座屈変形状態の系の全ポテンシャルエネルギーの停留条件	薄肉直線開断面部材の線形化有限変位理論	Kappus, R. Bleich, F. & H. Bleich 奥村 敏恵
C	1)断面は剛である。 2)中央面のせん断変形はない。	1) $\bar{E}_s^t = \frac{\partial v}{\partial s} = 0$ ポアソン比 $\mu = 0$ 2) $\bar{L} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$	a) $\bar{\xi}_s = \xi - (y - \alpha_y)\theta$ b) $\bar{\eta}_s = \eta + (x - \alpha_x)\theta$ c) $v = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \theta h$ d) $w = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + \theta t$ e) $u = \xi - \xi'x - \eta'y - \theta\omega$	初期応力の概念に基づく仮想仕事の原理	薄肉直線開断面部材の線形化有限変位理論	築地 恒夫 坂井 藤一
D	1)軸方向変位(w)は微小である。 2)断面は変形しない。 3)断面の中央面の垂線は変形後も中央面に垂直である。 4)中央面の面内せん断応力は0である。	1)有限変位理論によるわずかに変位関係においてuの微係数の2次項を無視する。 2) $\bar{E}_s^N = \bar{E}_N = \bar{E}_N^N = 0$ 3) $\bar{E}_N^N = 0$ 4) $\bar{E}_s^N = 0$	a) $\bar{\xi}_s = \xi - (y - \alpha_y)\theta - (x - \alpha_x)\frac{\theta^2}{2}$ b) $\bar{\eta}_s = \eta + (x - \alpha_x)\theta - (y - \alpha_y)\frac{\theta^2}{2}$ c) $v = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \theta h - \frac{\theta^2}{2}t$ d) $w = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + \theta t + \frac{\theta^2}{2}h$ e) $u = \xi - (\xi' + \theta\eta')x - (\eta' - \theta\xi')y - \theta\omega$	仮想速度の原理(安定限界では荷重増分が0で、増分つり合い式が成立する条件)	薄肉直線開断面部材の有限変位増分理論	田中 尚 宇田川 邦明
E	1)断面寸法に比べ部材長は十分に長い。 2)断面は変形しない。 3)中央面に垂直で軸線に平行な面内のせん断応力は無視し得る。 4)中央面内の面内応力成分が力とつり合うせん断応力にのみせん断応力は無視し得る。	1)有限変位理論によるわずかに変位関係においてuの微係数の2次項を無視する。 2) $\bar{E}_N = \bar{E}_N = \bar{E}_N^N = 0$ 3) $\bar{E}_N^N = 0$ 4) $\bar{E}_s^N = \frac{\xi}{\theta r_s}$	a) $\bar{\xi}_s = \xi - (y - \alpha_y)\sin \theta - (x - \alpha_x)(1 - \cos \theta)$ b) $\bar{\eta}_s = \eta + (x - \alpha_x)\sin \theta - (y - \alpha_y)(1 - \cos \theta)$ c) $v = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + h \sin \theta - t(1 - \cos \theta)$ d) $w = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + t \sin \theta + h(1 - \cos \theta)$ e) $u = \xi - x(\xi' \cos \theta + \eta' \sin \theta) - y(\eta' \cos \theta - \xi' \sin \theta) - \theta\omega$	仮想仕事の原理(一定の荷重条件、境界条件のもとに、微小な差を有する二つの独立解が存在する条件)	薄肉直線棒部材の有限変位理論	西野 文雄 倉方 慶夫 長谷川 幸夫 奥村 敏恵
F	1)薄板要素の中央面に垂直な方向の応力は無視し得る。 2)断面は剛である。	1) $\bar{E}_N = \bar{E}_N = \bar{E}_N^N = 0$ 2)面内変位は剛体運動である。第一近似として $\bar{E}_s = 0$ とおける。	a) $\bar{\xi}_s = \xi - (y - \alpha_y)\theta$ b) $\bar{\eta}_s = \eta + (x - \alpha_x)\theta$ c) $v = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \theta h$ d) $w = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + \theta t$ e) $u = \xi - \xi'x - \eta'y - \theta\omega$	基準状態の系の全ポテンシャルエネルギーの第一変分が停留値をとり条件	薄肉直線部材の線形化有限変位理論	著者ら

3. 座屈安定方程式の誘導

薄肉という幾何学的仮定より、板厚中央面に垂直な方向の応力は小さく、無視できると考えられ、 $\sigma_n = \tau_{zn} = \tau_{sn} = 0 \dots (1)$ と書ける。そこで n 方向のたわみ易さ κ を考慮し、 $w = w(x, s) \dots (2)$ とおけば、(1)式より $U = u - \frac{\partial w}{\partial s} \kappa$; $V = v - \frac{\partial w}{\partial s} \kappa \dots (3)$ と得る。したがって、部材内の任意点の変位 (U, V, W) は中央面上の値 (u, v, w) で表現できる。付言するならば(2),(3)式の変位関数を用いると、断面変形を考慮した解析が可能となる。

断面剛の仮定から、面内変位に対して剛体運動を仮定すれば、 x, y 方向の面内変位 (ξ_s, η_s)

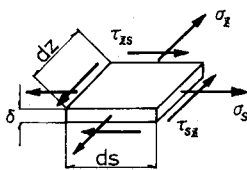


Fig. 2 Strip Element

として表-1のE-a, b) 式, 中央面上の任意点の S, n 方向の変位 (v, w) として表-1のE-c, d) 式と同じものが得られる。部材軸方向の変位 u の決定に際し、断面剛の二番目の解釈として、微小平板要素に作用する横方向 (s 方向) 力に対して重ね合せの原理を仮定すれば、中央面内のつり合い方程式: $\frac{\partial(\bar{\tau}_s \delta)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ss} \delta)}{\partial s} = 0 \dots (4)$; $\frac{\partial(\bar{\tau}_s \delta)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ss} \delta)}{\partial s} = 0 \dots (5)$

において、第一近似として $\bar{\tau}_s = 0 \dots (6)$ とおける。したがって、(5)式より $(\bar{\tau}_{ss} \delta) = T(s) \dots (7)$ と得る。ここで、有限変位理論のひずみ-変位関係を用い、高次の微小量を無視すれば、 $\bar{\tau}_{ss} = G \bar{\gamma}_{ss} = G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right] = \frac{T(s)}{\delta S} \dots (8)$ とかける。(8)式を u について解くと

$$u = \int_0^s \frac{T(s)}{G \delta S} ds + \xi - x(\xi + \eta \sin \theta) - y(\eta - \xi \sin \theta) - \theta \omega \dots (9)$$

と得る。この変位関数を用いると横荷重として集中荷重を受ける閉断面部材の解析が可能であり、第一項を無視すると閉断面部材の有限変位理論の変位関数として使用でき、線形項のみを残せば従来の薄肉閉断面部材の理論の変位関数(表-1のA, B, C)と一致する。

軸方向変位 u の第二近似値を求めるために(4)式を変形すると、 $(\bar{\tau}_{ss} \delta) = \delta(x) - E \int_0^s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} ds \dots (10)$ とかける。ここに、 $\bar{\tau}_s = 0$ より $\bar{\tau}_x = E \epsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \dots (11)$ なる関係式が有効であると仮定した。ゆえに、軸方向変位 u は

$$u = u_0 - \int_0^s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} ds - \int_0^s \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} ds + \int_0^s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} ds - \frac{E}{G} \int_0^s \int_0^s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \delta ds ds \dots (12)$$

となる。この第二近似値を用いると、任意の断面形状(閉断面・開断面)を有する部材の一般的な解析が可能になるばかりでなく、せん断変形を考慮した解析が可能となる。かかるに、理論展開の単純化およびり合

い式として微小変位理論による(4),(5)式を利用したことを考慮すれば、(8),(12)式において非線形項 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ を無視しても良いと考えられる。

この線形化の妥当性を検討するために、問題と薄肉開断面部材の座屈に限定し、従来の研究と比較してみる。上記の理由により、線形化した変位関数(表-1のA, B, Cと同じもの)を用いる。この変位関数に対し、有限変位理論のひずみ-変位関係を用い、一般化されたHooke則の成立を仮定すれば、基準状態の系の全ポテンシャルエネルギー Π は²⁾

$$\Pi = \int_0^L \int_F \left\{ \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2} \tau_{xs} \gamma_{xs} \right\} dF dx - \int_0^L \int_F \left\{ P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w \right\} dF dx - \left[\int_0^L \int_F \left\{ \sigma_x^* u + \tau_{xs}^* v + \tau_{zn}^* w \right\} dF \right]_0^L \dots (13)$$

と表わされる。ここに(*)は外荷重による値を示す。

ゆえに、座屈安定の支配方程式は Π の第二変分の停留条件: $\delta(\frac{1}{2} \Delta^2 \Pi) = 0$ より求まる。結果のみを示すと

- i) $\Delta^4 u = 0,$
- ii) $(\Delta M_y)'' - (\Delta M_x \theta)'' - (M_x \theta)'' + (\Delta N_x \gamma)' + (\Delta N_y \gamma)' + (A_y \Delta N \theta)' + (A_x \Delta N \theta)' = 0$
- iii) $(\Delta M_x)'' + (\Delta M_y \theta)'' + (M_y \theta)'' + (\Delta N_x \gamma)' + (\Delta N_y \gamma)' - (A_x \Delta N \theta)' - (A_y \Delta N \theta)' = 0$
- iv) $(\Delta M_y)'' + (\Delta T_s)'' + (\Delta M_x \theta)'' + (M_x \theta)'' + (\Delta M_y \gamma)' + (M_x \theta)'' - (\Delta M_x \gamma)' - (M_x \theta \gamma)' + (A_y \Delta N \gamma)' + (A_x \Delta N \gamma)' - (A_x \Delta N \theta)' - (A_y \Delta N \theta)' = 0$

となる。ここに $\Delta(\)$ は座屈時の変化量を示し、 N は引張りのとき正であり、 T_s : サブアタンのねじりモーメント、 $M_F = \int_F \sigma_x \{x - a_x\}^2 + \{y - a_y\}^2 dF$ である。

座屈安定方程式(14)は線形化有限変位理論に属する解析により得られたものであるが、中心圧縮材の座屈の場合には従来の研究(表-1のA, B, C, D, E)の結果と一致し、横倒れ座屈に対しても外荷重として曲げモーメントと集中荷重だけが作用している場合には有限変位理論(表-1のE)による結果とほぼ一致し、座屈前の変位を無視すれば従来の線形化有限変位理論(表-1のA, B, C)による結果と一致する。

4. あとがき 以上の考察より、外荷重が曲げモーメントと集中荷重だけである場合には、中心圧縮材の座屈・横倒れ座屈で代表されるような分岐形の安定問題に対し、線形化有限変位理論が有効に利用できると思われる。変位関数を線形化せずに、二次項・三次項の影響を考慮すると、より複雑な外荷重を受ける部材の座屈安定問題を扱うことができる。

5. 参考文献
 1) Vlasov, V.Z.: 薄肉弾性ばりの理論, 奥村敏徳他訳, 技報堂, 1967.
 2) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏徳: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, 1974.