

秋田大学 正員 薄木 征三
 秋田大学 正員 榎 隆知徳
 秋田大学 学生員 山岸 一彦

1. まえがき 軸力と曲げとねじりを受ける薄肉断面部材の層厚に関する研究は、Euler以来の古い歴史をもちいるが、特に有限変位理論に基づく研究は比較的历史と乏しく、近年内外の研究者において、より精密に、かつ体系的にまとめられつつあるように思う。この中で特に注目すべき成果は、層厚前の1回の変形を考慮することにおいて、多軸回りに曲げモーメントが作用している場合に横撓層現象が起る可能性を、理論的に説明されたことであろう。¹⁾しかしながら、これは11すなわち直線材に限られており、アーチや曲線材に於ける曲線材に対して類似の結果が予想されるが、未だ十分解明されてはおりない。このため、曲線材に於ける有限変位理論に基づき、仮想仕事の原理の別の表現である増分理論において、1回の有意な精度以内で、一般的に層厚方程式を導くことを目的とする。

2. 変位の成分 図-1において、断面不変の固定と肉厚方向のせん断ひずみを無視することにより、薄肉シェルの変位-変位関係から、変位を決定することから、結果のみかく²⁾

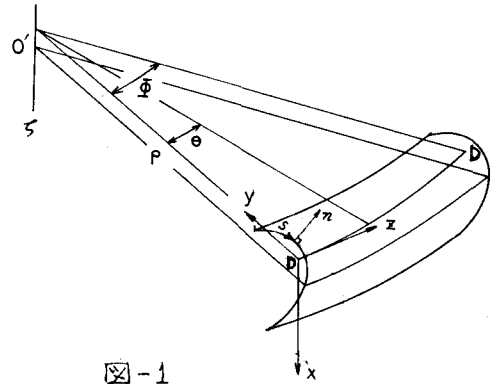


図-1

$$u = \bar{u} - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi)$$

$$v = \bar{v} + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \quad \dots (1)$$

$$w = \bar{w} - y \{ (\bar{v} + \bar{w}/R) \cos \varphi - \bar{u} \sin \varphi \} - x \{ \bar{u} \cos \varphi + (\bar{v}' + \bar{w}'/R) \sin \varphi \} - \omega(s, m) \{ \varphi' - \bar{u} \cos \varphi / R - (\bar{v}' + \bar{w}') / R \sin \varphi \}$$

ここで $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \varphi$ は任意点 D での x, y, z 方向変位、 ω はねじり角であり $\omega(s, m)$ はその関数である。(1)と(2)の変位関係を代入し、変位の3次元で考慮すると次式を得る。

$$E_0 = (R/\rho) \{ E_x - y E_a - x E_b - \omega E_c \} + (R/\rho)^2 \{ (\varphi/R)^2 E_d + y^2 E_e + (x - \omega/R)^2 E_f + xy E_g + \omega y E_h \}$$

$$E_3 = \Theta \{ \psi_2 - \phi_2 \varphi / R + \phi_2 \varphi^2 / R \} \quad \dots (2)$$

ここで

$$E_a = K_x - \varphi^2 / 2R - \phi_2 \psi_2 + \phi_2 \psi_2' - (\phi_2 \varphi + \phi_2 \varphi^2 / 2)'$$

$$E_b = K_y - \phi_2 \psi_2 + \varphi (-\varphi^2 / 6R + \phi_2^2 / R + \phi_2 \psi_2 + \phi_2^2 / R) + (\phi_2 \varphi - \phi_2 \varphi^2 / 2)'$$

$$E_c = \psi_0 - \{ (\phi_2 \varphi - \phi_2 \varphi^2 / 2)' - \phi_2 \psi_2 + \varphi \phi_2^2 / R \} / R$$

$$E_d = (\phi_2^2 + \phi_2^2) / 2, \quad E_e = \psi_2^2 / 2, \quad E_f = \psi_2 (\psi_2 / 2 - \varphi \phi_2 / R)$$

$$E_g = \varphi \phi_2 \psi_2 / R, \quad E_h = \varphi \psi_2^2 / R \quad \dots (3)$$

また(3)より

$$E_x = \bar{w}'' - \bar{v}'' / R, \quad \phi_x = \bar{v}' + \bar{w}' / R, \quad \phi_y = \bar{u}', \quad \psi_2 = \varphi' - \bar{u}'' / R,$$

$$\psi_0 = \varphi'' - \bar{u}'' / R, \quad K_x = \bar{v}'' + \bar{w}'' / R, \quad K_y = \bar{u}'' + \varphi' / R \quad (4)$$

なお(2)の Θ は断面内節円関数である。

3. 増分理論 層厚前の釣合状態での外力、ひずみ変位を、それぞれ $\delta_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0, u_i^0$ とし、層厚後のそれらの増分を $\delta_{ij}^1, \epsilon_{ij}^1, u_i^1$ とすると、層厚後に対する仮想仕事の原理は³⁾

$$\int_V (\delta_{ij}^1 + \delta_{ij}^0) \delta (\epsilon_{ij}^1 + \epsilon_{ij}^0) dV - \int_V P_i^0 \delta (u_i^1 + u_i^0) dV$$

$$- \int_S (T_i^1 + T_i^0) \delta (u_i^1 + u_i^0) dS = 0 \quad \dots (5)$$

ここで P_i^0, T_i^0 は層厚前の1回作用した物体力と表面力、 T_i^1 は増分である。物体力の増分は無いとすることができる。(5)に(1)と(2)を代入し、変位 u, v, w

と $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \varphi$ の3次元で考慮し、かつ、変位の増分量のみについては2次元で考慮することによって次式を得る

$$\int_{0, F} \int_{0, F} (\delta_0 \delta \epsilon_0^* + \delta_3 \delta \epsilon_3^* + \delta_0 \delta \epsilon_0^N + \delta_3 \delta \epsilon_3^N) dF d\theta -$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(T_{12} \delta u^N + T_{22} \delta v^N + T_{32} \delta w^N) dF d\theta - \int_F (T_{12} \delta u^N + T_{22} \delta v^N + T_{32} \delta w^N + T_{12} \delta u^* + T_{22} \delta v^* + T_{32} \delta w^*) dF \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(T_{12} \delta u^* + T_{22} \delta v^* + T_{32} \delta w^*) dF d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(T_{12} \delta u^* + T_{22} \delta v^* + T_{32} \delta w^*) dF \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \quad (6)$$

(6)の右辺は、厚層前の釣り合い状態での全応力と、 $z=0$ 上の応力とを比較するから、右辺 = 0 である。 T_{12}, T_{22}, T_{32} は物体力である。 $T_{12} = T_1 M, T_{22} = T_2 L$ (L, M は x の方向係数) であるが、この T_1 は (2) の T_1 と同じには、他に、 $z=0$ 上のせん断応力が加えられる。(6)の左辺を

$$\left. \begin{aligned} \delta u^* &= \delta u - y(1-\varphi^2/2)\delta\varphi - x\varphi\delta\varphi \\ \delta u^N &= (y\varphi^2 - x)\varphi\delta\varphi \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (7)$$

である。すなわち、* の z の量は厚層前の変位に z について 2 次、厚層後の増分は z について 1 次である。 N の z の量は、 x の z の量は、 z について 2 次である。つまり z について $\delta y_2^* = \theta \{ \delta y_2 - (\varphi^2 \delta x + \varphi^2 \delta \varphi) / R + \varphi^2 (\varphi^2 \delta \varphi / 2 + \varphi \delta \varphi) / R \}$
 $\delta y_2^N = \theta \{ -\varphi (\delta x - \varphi^2 \delta \varphi) + (x + \varphi y + \varphi^2 \delta \varphi) \delta \varphi \} / R$
 $\dots \dots \dots$ (8)

と仮定する。次に構成方程式は、(1) は $z=0$ の z について厚層前 $\sigma_0 = E \epsilon_0$ (9)
 厚層後 $\sigma_0 + \delta \sigma = E (\epsilon_0 + \epsilon_0^* + \epsilon_0^N)$ (10)

(10) から (9) を引くと、 ϵ_0^N は無関係で、増分量は z について $\delta \sigma = E \epsilon_0^*$ (11)

同様にしてせん断応力の増分は z について $\tau_3 = G \delta_3^*$ を用いることができる。

(6) の左辺の σ 項の断面内の積分を行くと、種々の断面定数が定義される。すなわち ϵ_0, τ_3 以下のよう。

$$\begin{aligned} J_x &= \int_F \frac{R}{F} y^2 dF, J_x' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 y^2 dF, J_y = \int_F \frac{R}{F} x^2 dF, J_y' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 x^2 dF, \\ J_{xy} &= \int_F \frac{R}{F} xy dF, J_{xy}' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 xy dF, C_x = \int_F \frac{R}{F} \omega y dF, C_x' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega y dF, \\ C_y &= \int_F \frac{R}{F} \omega x dF, C_y' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega x dF, C_{\omega} = \int_F \frac{R}{F} \omega^2 dF, C_{\omega}' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega^2 dF, \\ Z_x &= \int_F \frac{R}{F} y dF, Z_x' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 y dF, Z_y = \int_F \frac{R}{F} x dF, Z_y' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 x dF, \\ J_{px} &= \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 y^3 dF, J_{py} = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 x^3 dF, J_{p_{xy}} = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 xy^2 dF, J_{p_{yx}} = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 x^2 y dF, \\ I_{xy} &= \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega xy dF, I_x = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega y^2 dF, I_y = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega x^2 dF, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_x &= \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega y^2 dF, K_y = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega x^2 dF, K_{\omega} = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega^3 dF, \\ B_{\omega} &= \int_F \omega dF, F = \int_F dF, F_p = \int_F dF, F_{\omega} = \int_F \frac{F}{R} dF, \\ P_x &= \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 y^2 dF, P_y = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 x^2 dF, P_{xy} = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 xy dF, P_{xy}' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 xy^2 dF, P_{xy}'' = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 y^2 x dF, Q_x = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega y^2 dF, Q_y = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega x^2 dF, \\ R_x &= \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega y^2 dF, R_y = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega x^2 dF, R_{xy} = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega xy dF, \\ S_y &= \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega^2 x dF, S_x = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega^2 y dF, S_{\omega} = \int_F \left(\frac{R}{F}\right)^2 \omega^3 dF, \quad (12) \end{aligned}$$

(6) の変分 $\delta \phi_x, \delta \phi_y, \delta \phi_0, \delta k_x, \delta k_y, \delta \epsilon_0, \delta \varphi$ に対しては、厚層前後の変位の増分量に対する微分方程式を得る

$$\begin{aligned} & \{ E(A_3^* - A_3^* / R + B_3^*) + M_3^* \}' + \{ E(B_3^* / R - B_3^*) \\ & + G J_T (C_2^* / R - C_2^*) + M_2^* / R - M_1^* - T_1^* \varphi \delta \varphi / R \\ & - \{ m_x^* + (m_y^* - m_{\omega}^* / R) \varphi^2 \cdot \varphi \}' = 0, \\ & (E B_1^* + M_1^*)'' - E A_1^* / R - \{ E B_2^* + G J_T C_1^* \\ & - M_1^* + T_1^* \varphi / R - (m_y^* - m_{\omega}^* / R - m_x^* \varphi^2) \varphi \}' = 0, \\ & - \{ E(A_1^* + B_1^* / R) + M_1^* / R \}' + E B_1^* / R + G J_T C_1^* / R \\ & + M_1^* / R - T_1^* \varphi / R^2 - (m_y^* - m_{\omega}^* / R - m_x^* \varphi^2) \varphi / R = 0, \\ & (E A_4^*)'' + E(A_3^* / R + B_2^*) + G J_T C_1^* \\ & - (G J_T C_2^* + M_3^* + M_2^*)' + M_2^* + T_1^* (\phi_y \varphi + \varphi^2 \phi_x \\ & - \phi_x) / R - (m_x^* - m_{\omega}^* \varphi^2) \varphi + m_x^* (\phi_y + \phi_0^2 \varphi \\ & + \varphi^2 \phi_x) - (m_y^* - m_{\omega}^* / R) (\phi_x - \phi_y \varphi - \varphi^2 \phi_y) = 0, \end{aligned} \quad \dots \dots (13a-d)$$

この他に、増分量に関する自然境界条件を得るが、省略する。(13a-d) において、* の z の量は、厚層前の変形と変位増分の積から成ることを示し、 $M_1^*, M_2^*, \dots, M_3^*$ は、厚層前の断面力と変位および変位増分の積で与えられることを示す。

$m_x^*, m_y^*, \dots, m_{\omega}^*$ は、物体力による分布 $\epsilon - x$ の荷重である。 $A_1^*, B_1^*, C_1^*, M_1^*$ のみを示すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} A_1^* &= F \epsilon_0 - Z_x \epsilon_0^* - Z_y \epsilon_0^* + F_p \epsilon_0^* + J_x' \epsilon_0^* + (J_y' - \\ & Z C_y' / R + C_{\omega}' / R^2) \epsilon_0^* + J_{xy}' \epsilon_0^* + C_x' \epsilon_0^*, \\ B_1^* &= (1 - \varphi^2 / 2) A_2^* + \varphi^2 (A_3^* - A_3^* / R), \end{aligned}$$

$$C_1^* = \{ \psi_0 - (\varphi \phi_x + \phi_0^0 \varphi) / R + \varphi^0 (\varphi \phi_y / 2 + \phi_0^1 \varphi) / R \}$$

$$\times (\varphi \phi_y - \phi_0^2) / R,$$

$$M_1^0 = (M_x^0 \varphi_0 - M_y^0 + M_0^0 / R) \varphi. \dots (14)$$

また (14) で E_0^* , E_0^0 , ..., E_n^* は, E_0^0 による成分であることを示す。

$$M_2^0 = \int_F \sigma_0^0 y dF, M_y^0 = \int_F \sigma_0^0 x dF, M_0^0 = \int_F \sigma_0^0 \omega dF,$$

$$T_3^0 = \int_{F'} T_3^0 \theta dF. \dots (15)$$

である。その他、直線材に見られる断面力 $M_2^0, M_3^0, \dots, M_n^0$ に含まれるが、省略する。

(6) の右辺から出てくる、層厚前の変位に関する微分方程式は次のようになる。

$$\{ E(A_3^0 - A_0^0 / R + B_0^0) \}'' + [E(B_2^0 / R - B_0^0) + G J_T (C_2^0 / R - C_3^0) + m_y^0 (1 - \varphi_0^0 / 2) - m_x^0 \varphi^0 - m_0^0 (1 - \varphi_0^0 / 2) / R]' - p_x^0 = 0,$$

$$\frac{(E B_1^0)' - E A_1^0 / R - \{ E B_2^0 + G J_T C_2^0 + m_x^0 (1 - \varphi_0^0 / 2) + (m_y^0 - m_0^0 / R) \varphi^0 \}'}{R} - p_y^0 = 0,$$

$$- \{ E(A_1^0 + B_1^0 / R) \}' + E B_2^0 / R + G J_T C_2^0 / R - \{ m_x^0 (1 - \varphi_0^0 / 2) + (m_y^0 - m_0^0 / R) \varphi^0 \} / R - p_z^0 = 0,$$

$$\frac{(E A_2^0)' + E(A_3^0 / R + B_2^0) + G J_T C_1^0 - (G J_T C_2^0)' + m_x^0 (\varphi_y^0 + \varphi^0 \phi_x^0) - m_y^0 (\phi_x^0 - \phi_y^0 \varphi^0) - m_z^0 (1 - \varphi_0^0 / 2) + m_{x0}^0 \varphi^0 + m_{y0}^0 (\varphi_x^0 - \phi_y^0 \varphi^0) / R + m_{z0}^0}{R} = 0, \dots (16a-d)$$

\Rightarrow 2. p_x^0, p_y^0, p_z^0 は, $\varphi_x^0, \varphi_y^0, \varphi_z^0 \in$ 横断面内で積分した x, y, z 方向の荷重を意味する。

A_1^0, B_1^0, C_1^0 のみは定数

$$A_1^0 = F E_0^0 - \sum_x E_0^0 - \sum_y E_0^0 + F_0 E_0^0 + J_x' E_0^0 + (J_y - z C_y^0 / R + (C_1^0 / R^2) E_y^0 + J_{xy} E_y^0 + C_x^0 E_x^0,$$

$$B_1^0 = (1 - \varphi_0^0 / 2) A_2^0 + \varphi^0 (A_3^0 - A_0^0 / R),$$

$$C_1^0 = (\psi_0 - \phi_0^0 \varphi^0 / R + \phi_0^1 \varphi^0 / 2 R) (\varphi \phi_y - \phi_0^2) / R. (17)$$

であり, また $E_0^0, E_0^0, \dots, E_n^0$ は, E_0^0 を構成する成分である。その他に層厚前の釣合状態に自然環境条件を得るが省略する。

以上の層厚材に対する微分方程式 (13a-d) と層厚材に対する微分方程式 (16a-d) の他に (15) の断面力の変位を表わす必要があるが, それは $\sigma_0^0 = E E_0^0, T_3^0 = G T_3^0$ (15) に代入するだけでよい。

4. 下-4の横層厚方程式

図-1で, 断面 x, y 両軸に寸法 $2a, 2b$ の, 両端に等しい曲が x と M_2^0 が作用したときの, 横層厚層厚方程式を求めてみる。このように層厚材の構造であり, (12) で定義される断面定数のいくつかはゼロになる。また, 層厚材の方程式 (13a-d) は, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \varphi$ が全て連成する。 $R/P \sim 1$ とするときは, 層厚荷重の値に多少影響があると思われるが, 現象の本質を見誤るとはならないから, 直線材と同一の断面定数を用いる。(13a) と (13d) は次のようになる。

$$\{ E(A_3^* - A_0^* / R) + \bar{M}_x^0 \varphi^0 \}'' + \{ -E(A_3^* - A_0^* / R) \phi_0^0 / R + G J_T C_2^* / R - 2 \bar{M}_x^0 \bar{u}' / R \}' = 0,$$

$$\frac{(E A_4^*)'' + E \{ A_3^* / R + (A_3^* - A_0^* / R) (\kappa_x^0 + \phi_x^0 / R) + G J_T C_1^* - (G J_T C_2^*)' + \bar{M}_x^0 (\bar{u}'' + \varphi / R + \kappa_x^0 \varphi + \phi_x^0 \bar{u}' / R) \}}{R} = 0, \quad (18a, b)$$

$$\begin{aligned} A_3^* &= J_y \{ \bar{u}'' + \phi_x^0 \bar{u}' / R + (1/R + \kappa_x^0 + \phi_x^0 / R) \varphi \} \\ A_4^* &= C_w \{ \varphi'' - \bar{u}'' / R - \phi_x^0 \bar{u}' / R^2 - (\kappa_x^0 + \phi_x^0 / R) \varphi / R \} \\ C_1^* &= -(\varphi - \bar{u}' / R - \phi_x^0 \varphi / R) \phi_x^0 / R \\ C_2^* &= \varphi' - \bar{u}' / R - \phi_x^0 \varphi / R \quad \dots (19) \end{aligned}$$

(13a), (13d) から (18a), (18b) の誘導には, 1. 2 は条件より

$$\begin{aligned} \sum_y = \sum_x = \sum_y' = \sum_x' = J_{xy} = J_{yx} = J_{yy} = J_{px} = J_{py} = J_{px} = J_{py} = J_{xx} = I_x = C_x = C_y = 0, \end{aligned}$$

である。 $\varphi_0^0 = \bar{u}^0 = \psi_0^0 = \phi_y^0 = \phi_x^0 = \kappa_y^0 = \omega_0^0 = \varphi_0^0 = 0$ を用いる。 $R \rightarrow \infty$ の極限では, (18a, b) は x, x' の

$$\begin{aligned} [E J_y (\bar{u}'' + \bar{v}^0 \varphi) + \bar{M}_x^0 \varphi]'' &= 0 \\ (E C_w \varphi'')'' + (E J_y \bar{v}^0 + \bar{M}_x^0) (\bar{u}'' + \bar{v}^0 \varphi) - (G J_T \varphi')' &= 0 \quad \dots (20a, b) \end{aligned}$$

となる。又 (1) の結果と一致する。 右に, (18a, b) の解から (16b, c) から, 層厚材の変形に課する微分方程式と誘導に必要になる。

交南欠)

1. 西野, 倉方他「軸力と曲げ」の「同じ」を交する薄肉断面部材, 土木学会論文集, 225号, 1974年5月
2. 本橋, 渡辺, 薄肉, 薄肉曲線材の有限要素法理論,