I-44　有限要素法によるクリープ解析

日本大学　正会員　色部　誠
同上　　○畦間　享一

1.　まえがき

金属のほとんどすべてが高温のもとでクリープ変形を生ずる。クリープ過程の多くは，クリープ速度が減少をたどる一期クリープから，次第にクリープ速度が一定となる二期クリープを経て，クリープ速度が増加する三期クリープに入り，クリープ破壊に到達する。クリープ法則には完成されたものがないと言われる程金属のクリープ現象は複雑である。クリープ法則のなかで合理性を欠くと言われている時間硬化理論，全ひずみ理論はクリープ解の上下界を与えるものとして構造解析においてその意義を認めるむきもある。本報告は，定荷重のもとで一期クリープから二期クリープに至るあいだに生ずる変形および応力再配分の有限要素法による解析を示す。クリープ法則には時間硬化理論を適用してある。

2.　解析上の仮定

i)　クリープ法則　　ここでの解析に用いたクリープ法則；時間硬化理論とはクリープひずみ速度を応力，時間，温度の関数とするもので，下式によってあらわされる。

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = f(\sigma, t, T) \qquad \text{または} \qquad \frac{d\varepsilon^c}{dt} = f_1(\sigma)\, f_2(t)\, f_3(T) \tag{1}$$

(1)の第二式右辺の$f_1(\sigma)$, $f_2(t)$, $f_3(T)$は応力関数，時間関数，温度関数と呼ばれている。

ii)　多軸応力の扱い。　一般に，クリープ法則は一軸応力状態の変形に対してしか得られていない。多軸応力状態のもとでの変形にクリープ法則を拡張一般化するために，通常塑性理論の仮定が用いられており，ここでもそれに従う。すなわち，クリープには体積変化を伴わない。ひずみ速度は静水圧に影響されない，更に，材料は等方性とする。その結果，クリープひずみ増分テンソルを$d\varepsilon_{ij}^c$，偏差応力テンソルをS_{ij}とすれば，

$$d\varepsilon_{ij}^c = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} S_{ij} \tag{2}$$

を得る。$d\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$は各々相当ひずみ増分，相当応力を表わす。クリープ法則(1)は$d\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$に対しても成立し，

$$d\bar{\varepsilon} = f_1(\bar{\sigma})\frac{df_2(t)}{dt} f_3(T)\, dt \tag{3}$$

相当応力は，

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ (\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\}^{1/2} \tag{4}$$

であり，これを偏微分して下式を得る。

$$\bar{\sigma}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{3}{2} S_{ij} \tag{5}$$

(3),(4),(5)を(2)に代入し，$f_1(\bar{\sigma})$にべき法則$f_1(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^m$を用いれば，

$$d\varepsilon_{ij}^c = f_1(\bar{\sigma})\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}\frac{df_2(t)}{dt} f_3(T)\, dt = \bar{\sigma}^m \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}\frac{df_2(t)}{dt} f_3(T)\, dt \tag{6}$$

を得る。

3.　一期クリープに対する有限要素法の基礎方程式とその応用。

一期クリープにおける応力速度および荷重速度を$\dot{\sigma}$，$\dot{F}$とし，そのときの変位速度，ひずみ速度を$\dot{u}$，$\dot{\varepsilon}$とす

る。一期クリープにおいては，変位速度の変分 $\delta\dot{u}$ に対し，変分方程式

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV = \int_\Sigma \dot{F}_i\,\delta\dot{u}_i\,d\Sigma \tag{7}$$

が成立する。これは仮想仕事の原理に相当するものであり，これより一期クリープに対する有限要素法の基礎式が得られる。

計算の簡易化のため，変形は弾性成分とクリープ成分とからなるものとすれば，“応力－ひずみ”関係式は

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^c_{kl}) = E_{ijkl}\left\{\frac{1}{2}(\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}) - \dot{\varepsilon}^c_{kl}\right\} \tag{8}$$

以上のテンソル記法をマトリクス－ベクトル記法に改め，有限要素法における通常の記号を用いれば，上の各式を要素に適用して，

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \{\dot{\varepsilon}\} = [B]\{\dot{\delta}\}^e \qquad \dot{\sigma}_{ij} = \{\dot{\sigma}\} = [D]([B]\{\dot{\delta}\}^e - \{\dot{\varepsilon}^c\}) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV &= \int_V (\{\Delta\dot{\delta}\}^e)^T [B]^T [D]([B]\{\dot{\delta}\}^e - \{\dot{\varepsilon}^c\})\,dV \\ \int_\Sigma \dot{F}_i\,\delta\dot{u}_i\,d\Sigma &= \int_\Sigma (\{\Delta\dot{\delta}\}^e)^T \{\dot{F}\}^e\,d\Sigma = (\{\Delta\dot{\delta}\}^e)^T\{\dot{F}\}^e \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(7)に(10)を代入し，次式を得る。

$$\{\dot{F}\}^e = \int_V [B]^T[D][B]\,dV\,\{\dot{\delta}\}^e - \int_V [B]^T[D]\{\dot{\varepsilon}^c\}\,dV \tag{11}$$

上式の右辺第二項はクリープ変形による見かけの外力と見なし得る。これを $\{\dot{F}^c\}$ と置けば，(11)は

$$\{\dot{F}\}^e + \{\dot{F}^c\}^e = [K]^e[\dot{\delta}]^e$$

と書き換えられ，これを考える物体全域にわたり重ね合わせて，時間増分 Δt に対する変位増分 $\{\dot{\delta}\}\Delta t$ を求めることができる。外力一定の場合は，$\{\dot{F}\} = 0$ となる。

以上の取扱いを内径対外径比 1 : 5 の無限円筒の表面に一様外圧 P が作用する問題に適用し，解を求めた。Fig. 1 は $m=2$ とした場合の σ_θ/p 分布の時間変化を示す。得られた解は比較のため太線で示してある定常クリープ解に収れんする。Fig. 2 には，$m = 2, 3, 5, 7$ の場合の円筒内壁における σ_θ/p の時間変化を示す。Fig. 1, 2 に示される値は全て無次元化されている。なお，詳細については会場にて述べる。

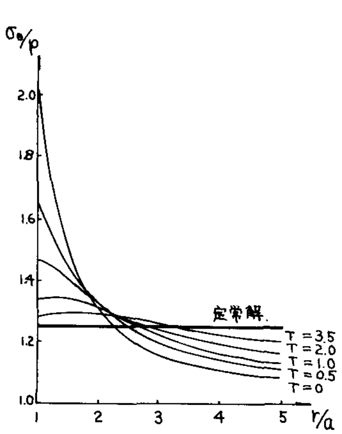

Fig. 1

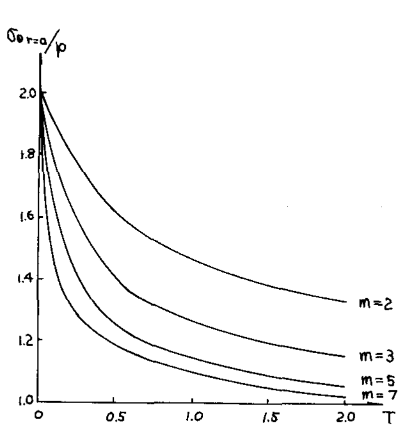

Fig. 2