I-42　高次項を考慮した面内応力の有限要素法

信州大学　正員　谷本勉之助
信州大学　正員　夏目正太郎
信州大学　学生員　○長谷正和

1．序文

本解析は、周知の応力方程式から出発し、矩形要素を用いた二次元の有限要素法について、漸化変形法を適用したもので、変位の形状関数に任意数の高次項を取り込み、それらの係数をひずみエネルギー最小の方法を用いて決定している。力釣り合いは、各節点に集まっている要素の頂点の力量を集計し、剛性マトリックスを三軸マトリックスに組み上げたものである。尚、この方法は、任意四角形要素及び三角形要素に対しても同様に処理することができる。

2．解析法

矩形要素は、頂点の自由度の合計が、変位量に関して８自由度となるので、平面応力状態における変位マトリックス$\mathbb{U}$を下式の様に３次の多項式及び４次の多項式を含んだカラムマトリックスとして仮定する。

$$\mathbb{U}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}\mathbb{X}+\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix}\mathbb{Y} \quad (1)$$

または、

$$\mathbb{U}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}\mathbb{X}+\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & y^2 \end{bmatrix}\mathbb{Y}_1+\begin{bmatrix} x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix}\mathbb{Y}_2$$

$$+\begin{bmatrix} x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \end{bmatrix}\mathbb{Y}_3 \quad (1)$$

ここで、基礎微分方程式

$$\begin{bmatrix} 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2} & (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}\mathbb{U}+\frac{2(1-\nu^2)}{E}\mathbb{K}=0 \quad (2)$$

に式（１）を代入して整理すると、局所座標系の状態ベクトルとして、変位マトリックス$\mathbb{U}$と力量マトリックス$\mathbb{V}$は、次の様になる。

$$\mathbb{U}=\{u,v\}=\mathbb{P}_0(x,y)\mathbb{X}+\mathbb{P}_1(x,y)\mathbb{Y}+\mathbb{A}_0(x,y)\mathbb{K} \quad (3)$$

$$\mathbb{V}=h\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\}=\{N_x,N_y,N_{xy}\}=\mathbb{Q}_0(x,y)\mathbb{X}+\mathbb{Q}_1(x,y)\mathbb{Y}+\mathbb{B}_0(x,y)\mathbb{K} \quad (4)$$

ここで$\mathbb{P}_0(x,y)$は（２×８），$\mathbb{Q}_0(x,y)$は（３×８）の基本形状関数によるマトリックスであり、$\mathbb{X}$は８個の未定常数からなる固有マトリックスである。$\mathbb{P}_1(x,y)$は$\mathbb{P}_0(x,y)$に、$\mathbb{Q}_1(x,y)$は$\mathbb{Q}_0(x,y)$に、それぞれひずみエネルギー最小の方法によって取込まれる補正マトリックスであり、$\mathbb{Y}$はその未定常数からなるマトリックスである。また、$\mathbb{A}_0(x,y)$，$\mathbb{B}_0(x,y)$は（２×２），（３×２）からなる荷重マトリックスで、$\mathbb{K}$は$\{X,Y\}$で定義さ

れる物体力マトリックスである。次にひずみエネルギー最小の方法を用いて表わす。

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}(N_x-\nu N_y),\ \frac{\partial}{\partial c_i}(N_y-\nu N_x),\ 2(1+\nu)\frac{\partial}{\partial c_i}N_{xy}\right\}\mathbb{V}\,dxdy=0 \tag{5}$$

ここで、2a，2bは矩形要素の幅を表わし、c_iは$\mathbb{Y}$に相当する未定常数である。この結果、出発変位マトリックス$\mathbb{U}$と出発力量マトリックス$\mathbb{V}$が次のように得られる。

$$\mathbb{U}=\{u,\ v\}=\mathbb{P}(x,y)\mathbb{X}+\mathbb{A}(x,y)\mathbb{K} \tag{6}$$

$$\mathbb{V}=\{N_x,\ N_y,\ N_{xy}\}=\mathbb{Q}(x,y)\mathbb{X}+\mathbb{B}(x,y)\mathbb{K} \tag{7}$$

上の2つの式から、固有マトリックスを消去して、力量と変位の関係を求めることができる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}^1\\\mathbb{V}^2\\\mathbb{V}^3\\\mathbb{V}^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{Q}^1\\\mathbb{Q}^2\\\mathbb{Q}^3\\\mathbb{Q}^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{P}^1\\\mathbb{P}^2\\\mathbb{P}^3\\\mathbb{P}^4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{U}^1\\\mathbb{U}^2\\\mathbb{U}^3\\\mathbb{U}^4\end{bmatrix}+\left[-\begin{bmatrix}\mathbb{Q}^1\\\mathbb{Q}^2\\\mathbb{Q}^3\\\mathbb{Q}^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{P}^1\\\mathbb{P}^2\\\mathbb{P}^3\\\mathbb{P}^4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{A}^1\\\mathbb{A}^2\\\mathbb{A}^3\\\mathbb{A}^4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{B}^1\\\mathbb{B}^2\\\mathbb{B}^3\\\mathbb{B}^4\end{bmatrix}\right]\mathbb{K} \tag{8}$$

ここに、漸化変形法で最も重要なKey Equationが得られた訳であるが、この方程式を基に各節点での力釣り合いを考えて、変位量のみを未知量とする連立方程式を導き出す。ここで上式は局所座標系での方程式であるから、力釣り合いを考えるためには、全体座標系への射影が必要となる。そのために局所座標系を全体座標系に射影する射影子を$\mathbb{R}^i$、またその射影から得られた全体座標系の力量を$\mathbb{W}^i$とすると、そのSegment Key Equationは、次の様になる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{W}^1\\\mathbb{W}^2\\\mathbb{W}^3\\\mathbb{W}^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{R}^1\mathbb{V}^1\\\mathbb{R}^2\mathbb{V}^2\\\mathbb{R}^3\mathbb{V}^3\\\mathbb{R}^4\mathbb{V}^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^1&\mu^1&\nu^1&\phi^1\\\lambda^2&\mu^2&\nu^2&\phi^2\\\lambda^3&\mu^3&\nu^3&\phi^3\\\lambda^4&\mu^4&\nu^4&\phi^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}^1\\\mathbb{U}^2\\\mathbb{U}^3\\\mathbb{U}^4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\rho^1\\\rho^2\\\rho^3\\\rho^4\end{bmatrix}\mathbb{K} \tag{9}$$

従って、任意節点での力釣り合いをとると、

$$\sum\mathbb{W}^i+\mathbb{P}=0 \tag{10}$$

となる。上式の$\mathbb{P}$は、x軸方向とy軸方向の外力マトリックスである。こうして、全節点で式（10）の関係が成立するので、これらを最終的に集約すると完全変位三軸マトリックスが得られる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}_1&\mathbb{C}_1&&\\\mathbb{A}_2&\mathbb{B}_2&\mathbb{C}_2&\\&---&---&---\\&&\mathbb{A}_n&\mathbb{B}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{\mathbb{U}\}_1\\\{\mathbb{U}\}_2\\---\\\{\mathbb{U}\}_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\{\mathbb{P}\}_1\\\{\mathbb{P}\}_2\\---\\\{\mathbb{P}\}_n\end{bmatrix}=0 \tag{11}$$

3. あとがき

有限要素法の最大の障害は、電子計算機の大きな容量を必要とする点であるが、この方法は高次の多項式を形状関数として取り込むことにより、要素分割を少なくして高精度の解を得ようとするものである。尚、数値計算結果は、講演会当日発表の予定である。