I-40　　有限要素法による弾塑性解析に対する一考察

中央大学理工学部土木工学科　正員　○　井口雄一
東京大学宇宙航空研究所　岸 輝雄
中央大学理工学部土木工学科　正員　川原睦人

1) 緒言

本報告では，二つの有限要素法による弾塑性体の解析について述べる。まず，テーマ1として，砂のような粒状物質を弾塑性体として取り扱う。T. HUECKEL, A. DRESCHERの提案した，体積弾性係数，せん断弾性係数が，密度変化率の多項式で表わされるという仮定を導入する。降伏に達しない非弾性域においても，除荷過程については，一定の弾性係数をもつとして解析を行なった。一般に降伏関数としては，Von Misesの降伏条件のように応力だけの降伏関数が用いられてきた。ここでは，テーマ2として，バウジンガー効果に着目した岸，田辺の塑性ポテンシャル[2]を降伏関数として用いて，解析を試みた。

2) 基礎方程式

変形は微少であるとし，増分形で基礎方程式を表わす。

(1.1)　$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{f}_i = 0$　（応力つりあい方程式）　σ_{ij}：応力，f_i：物体力

(1.2)　$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$　（ひずみ変位方程式）　ε_{ij}：ひずみ，u_i：変位

(1.3)　$\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{T}_i$　（表面力つりあい方程式）　n_j：方向余弦，T_i：表面力

(1.4)　$\dot{u}_i = \hat{\dot{u}}_i \quad on\ S_1$　（自然境界条件）

(1.5)　$\dot{T}_i = \hat{\dot{T}}_i \quad on\ S_2$　（力学的境界条件）

ここで，˙は増分，＾は既知量を示す。

3) 構成方程式

a) 弾塑性体としての構成方程式

全ひずみ増分が，弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分から成立する。

(2.1)　$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij}$

塑性ひずみ増分は，流れ法則に従う。

(2.2)　$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$　　Λ：定数，　f：降伏関数

応力増分と弾性ひずみ増分との間の関係として，次の関係が成立する。

(2.3)　$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$　　$E_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

弾塑性体が降伏状態にあるとき

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}) = \pi$$

が成立する。πはε^p_{ij}の関数である。増分量$\dot{f}$を考える。そこに，(2.1)～(2.3)を代入し，Λについて解く。求めたΛと(2.1)～(2.3)から，応力増分と全ひずみ増分との間の関係として，次の関係を得る。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

(2.4)

$$D_{ijkl} = E_{ijkl} - \frac{E_{ijtu}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}\right)E_{rskl}}{\left\{\left(\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon^p_{mn}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}\right)E_{mnpq}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{mn}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}\right)\right\}}$$

以上より，弾塑性体の構成方程式は，

$$(2.5)\quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}\quad ,\ \begin{cases} \text{I）初期弾性} & C_{ijkl} = E_{ijkl} \\ \text{II）負荷} & C_{ijkl} = D_{ijkl} \\ \text{III）除荷} & C_{ijkl} = E_{ijkl} \end{cases}$$

と，なる

b） テーマ1

降伏関数として，Druger-Prager の条件を用いる。

$$(2.6)\quad f = \alpha\,\sigma_{kk} + \left(\tfrac{1}{2}S_{ij}\cdot S_{ij}\right)^{1/2}\quad ,\quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\ :\ \text{偏差応力}$$

密度変化は，弾性と塑性の二つの部分から成立する。

$$(2.7)\quad \dot{\rho} = \dot{\rho}^{e} + \dot{\rho}^{p}\quad ,\quad \dot{\rho} = \rho_0\dot{\varepsilon}_{ii}\ ,\ \dot{\rho}^{e} = \rho_0\dot{\varepsilon}^{e}_{ii}\ ,\ \dot{\rho}^{p} = \rho_0\dot{\varepsilon}^{p}_{ii}$$

ここで，体積弾性係数K，せん断弾性係数Gは，次のような多項式で表わされる。

$$(2.8)\quad K = K_0\left[1 + \Sigma\alpha_n(\bar{\rho} - 1)^n\right],\ G = G_0\left[1 + \Sigma\beta_n(\bar{\rho} - 1)^n\right],\quad \bar{\rho} = \rho^e/\rho_0$$

c） テーマ2

降伏関数として，

$$(2.9)\quad f = S_{ij}S_{ij} - 2k\left(2\varepsilon^{p}_{ij}\varepsilon^{p}_{ij}\right)^{(m-1)/2}S_{ij}\varepsilon^{p}_{ij}$$

を用いる。ここに，k，mは実験より定められる定数である。

4）有限要素法

（1.1）に仮想仕事の定理を用いて，ガウス・グリーンの定理と（1.2），（1.3），（2.5）から

$$(3.1)\quad \int \dot{u}^{*}_{i,j}\,C_{ijkl}\,\dot{u}_{k,l}\,dV = \int u^{*}_{i}\dot{T}_i\,dS + \int u^{*}_{i}\dot{f}_i\,dV$$

を得る。変位について，一次の形状関数を用いると，

$$(3.2)\quad \dot{u}_i = \Phi_\alpha\,\dot{U}_{\alpha i}\quad ,\quad u^{*}_{i} = \Phi_\alpha\,U^{*}_{\alpha i}$$

となる。（3.1）に代入すると，$\dot{U}_{\alpha i}$に対しての連立一次方程式を得る。

$$(3.3)\quad K_{\alpha i\beta k}\,\dot{U}_{\beta k} = \dot{\Omega}_{\alpha i}\quad ,\quad K_{\alpha i\beta k} = \int \Phi_{\alpha,j}\,C_{ijkl}\,\Phi_{\beta,l}\,dV\ ,\ \dot{\Omega}_{\alpha i} = \int\Phi_\alpha\dot{T}_i\,dS + \int\Phi_\alpha\dot{f}_i\,dV$$

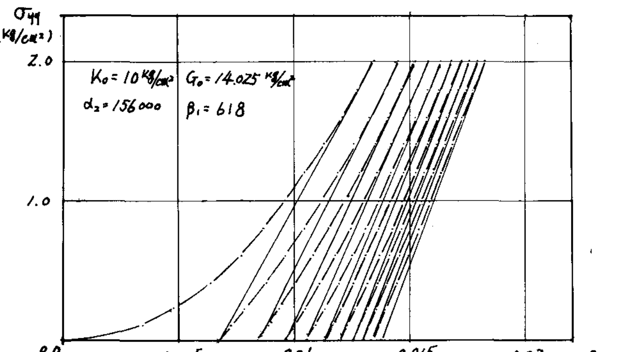
5）数値計算

（2.9）を，次のように定める。

$$K = K_0\left[1 + \alpha_2(\bar{\rho} - 1)^2\right]$$

$$G = G_0\left[1 + \beta_1(\bar{\rho} - 1)\right]$$

図は，粒状体の締め固めの状態を相似している。テーマ2については，塑性ひずみε^{p}_{ij}が降伏条件に含まれており，実際の計算では k，mの値が微妙に影響し，この値をいかに取るかが大きな問題となる。



繰返し荷重による応力ひずみ曲線

計算にあたり，東大大型計算機センター HITAC 8800/8700，東大宇宙航空研究所 FACOM 230-75 を使用した。なお，プログラム作製において，中央大学生松田宏君の協力を得た。記して感謝の意を表する。

◎参考文献

1）T. Hucekel, A. Drescher "On dilatational effects of inelastic granular media" Arch, Mech Vol 27, 157~172, 1975

2）T. Kishi, T. Tanabe "The Bauschinger effects and its role in mechanical anisotropy" J. Mech. Phys Solids. Vol 21, 303~315, 1973