I-39　双曲型微分方程式に対する一有限要素法解析

○ 中央大学 理工学部　川 原 睦 人
中央大学 大学院　竹 内 則 雄

1. 緒 言

有限要素法は，構造解析に端を発し，近年その重要性を富みに増加させている。従来は，主として楕円型微分方程式に主眼点がおかれており，波動方程式などの双曲型方程式に対する応用は，さほど多くは提案されていない。双曲型方程式に対して，楕円型方程式や放物型方程式に対して行なわれて来た手法をそのまま用いると，無条件不安定な解法となり，いかに時間間隔を細く取ったとしても，かならず発散して，答が得られない結果となることがある。このような不安定性を除去する方法として，差分法で良く行なわれているLax-Wendroff法の思想を取り入れることが考えられる。ここでは，この思想を用いた有限要素法を展開しその収束性を検討する。

2. 基礎方程式

次の線形双曲型微分方程式を考える。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} b_i(x)\,u_{,i}(x) = 0 \qquad x \in \Omega \subset R^p,\ \ 0 < t \leq T,\ \ 1 \leq p \leq 3 \tag{1}$$

ここにΩは，境界$\partial\Omega$を持つ有界領域とする。解$u(x) \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$は，

$$u(x, t) = 0 \qquad x \in \partial\Omega \qquad 0 < t < T \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \qquad x \in \Omega \tag{3}$$

を満足するとする。$C_0^\infty(\Omega)$の$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} \equiv \sum_{i=1}^{p} \|\frac{\partial\cdot}{\partial x^i}\|_{L^2(\Omega)}$に対する完備化を$H_0^1(\Omega)$とするとき，次の弱解が定義される。

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{p} b_i u_{,i}\ , v \right\rangle = 0 \qquad v \in H_0^1(\Omega),\ \ t \in (0, T) \tag{4}$$

$$u(x, t) \in H_0^1(\Omega)\ ,\ \ \langle u(\cdot, 0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle\ ,\ \ v \in H_0^1(\Omega) \tag{5}$$

ここに，$\langle u, v \rangle = \int_\Omega (u\,v)\,d\Omega$ で，解uについては適当ななめらかさを仮定しておく。

補助定理1.　Δt を微小時間区間とするとき，次の関係が成り立つ。

$$\left\langle \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, v \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{p} b_i u^n_{,i}\ , v \right\rangle + \frac{\Delta t}{2} \left\langle \sum_{i=1}^{p} b_i u^n_{,i}\ , \sum_{j=1}^{p} b_j u^n_{,j} \right\rangle = \left\langle \frac{\varepsilon}{\Delta t}\ , v \right\rangle \tag{6}$$

ここに，$|\varepsilon| < K(\Delta t)^3$，$u^n = u(n\Delta t)$ である。

3. Lax Wendroff 有限要素法

$\{\Phi_\alpha\}_{\alpha=1}^{M}$ ではられる有限次元空間 $S_M \subset H_0^1(\Omega)$の元を用いて，$t = n\Delta t$ における関数をW^nと表わせば，

$$W^n(x) = \sum_{\alpha=1}^{M} \Phi_\alpha(x)\, C_\alpha^n \qquad x \in \Omega \tag{8}$$

である。次の条件を満足する $W^n(x) \in S_M$ をLax-Wendroff有限要素法解と呼ぶ。

$$\langle W^{n+1}, V \rangle = \langle W^n, V \rangle - \Delta t \left\langle \sum_{i=1}^{P} b_i W_{,i}^n , V \right\rangle - \frac{\Delta t^2}{2} \left\langle \sum_{i=1}^{P} b_i W_{,i} , \sum_{j=1}^{P} b_j W_{,j} \right\rangle \tag{9}$$

$\forall\ V \in S_M \subset H_0^1(\Omega)$

$$\langle W^0, V \rangle = \langle u^0, V \rangle \quad , \quad \forall\ V \in S_M \tag{10}$$

式(8)と式(9)より，次の解式が得られる。

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{C}^n + \mathbb{B} \cdot \mathbb{C}^n + \mathbb{D} \cdot \mathbb{C}^n \tag{11}$$

$$\mathbb{A} = \langle \Phi_\alpha , \Phi_\beta \rangle , \qquad \mathbb{B} = -\Delta t \left\langle \sum_{i=1}^{P} b_i \Phi_{\alpha,i} , \Phi_\beta \right\rangle$$

$$\mathbb{D} = \frac{\Delta t^2}{2} \left\langle \sum_{i=1}^{P} b_i \Phi_{\alpha,i} , \sum_{j=1}^{P} b_j \Phi_{\alpha,j} \right\rangle$$

式(11)は陽な解公式を与えている。すなわち第n回目の $\mathbb{C}^n$ が求まれば，一回 $\mathbb{A}^{-1}$ を計算しておくことにより，第 $n+1$ 回目の $\mathbb{C}^{n+1}$ をただちに計算できる。

4. Lax-Wendroff有限要素法の収束

uの補間$\tilde{u}$を次の関係を満足する関数とする。

$$\langle \tilde{u}_{,i} , V_{,i} \rangle = \langle u_{,i} , V_{,i} \rangle \quad \tilde{u}(x) = 0 \quad , \ \forall\ x \in \partial\Omega \quad \forall\ V \in S_M \tag{12}$$

$$\tilde{u} = \sum_{\alpha=1}^{M} \Phi_\alpha(x) \tilde{C}_\alpha \tag{13}$$

補助定理2.　有限要素の直径をhとすると次の関係が成り立つ。

$$\| u - \tilde{u} \|_{L_2(\Omega)} \leq K h^2 \| u \|_{H^2(\Omega)} \tag{14}$$

$$\| u - \tilde{u} \|_{H^1(\Omega)} \leq K h \| u \|_{H^2(\Omega)} \tag{15}$$

補助定理3.　$Z^n = u^n - W^n$とすると次の関係が成り立つ。

$$\| Z^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}^2 - \| Z^n \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \| Z^{n+1} \|_{L_2(\Omega)}^2 + C_2 \| Z^n \|_{L_2(\Omega)}^2 + C_3 \Delta t^2 \| Z^n \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_4 \Delta t^2 \| Z^{n+1} \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + O(\Delta t^3) \tag{16}$$

定理.　$\Delta t = \lambda h^2$ ととれば，(11)による有限要素解は，(4)の弱解に収束する。

5. 結　言

差分法におけるLax-Wendroff 法を拡張して，陽なLax-Wendroff 有限要素法を得た。また，時間区間 Δt を h^2 オーダーに分割すれば，収束性をいうことができる。これは，安定性に対する十分条件にもなっている。圧縮性流体，潮流，衝撃波などの方程式に対する応用性がある。