I-38　有限要素法による非線形解析の誤差

センチュリ・リサーチ・センタ(株)　正員　武田洋
〃　○渡辺隆之
〃　斉藤昭弘

1. 序文

今日では構造解析の分野において多くの線形問題に対する静的および動的解析は日常的に行なわれており、さらに非線形問題へのアプローチも大きな中心課題の一つである。 しかし現状では非線形問題のために費やさなければならない時間と労力は線形問題に比較して格段の差があり、ややもすると多大の労力と時間を費やした結果が全く使いものにならなくなってしまう場合すらある。 この原因としては非線形問題に対する離散モデルの組みたてのむずかしさ、即ち種々の誤差を生じる可能性を多くもつことにある。 ここでは材料非線形および幾何学的非線形問題について、離散化誤差、収束誤差および数値誤差の傾向について数値実験とともに論じる。

2. 材料非線形問題

2-1 離散化誤差について

有限要素モデルの平衡方程式は一般に増分形で次のように表わせる。

$$(K^{(e)} - K^{(P)})\Delta U = \Delta R \qquad (1)$$

ここで$K^{(e)}$は定数項、$K^{(P)}$は非線形項である。(1)式の解 $U=\sum_i^n \Delta U$、(iは荷重ステップ数)とし真の解を$\bar{U}$としたとき次式が零に収束するならば適合近似である。 ここではまず離散化誤差について検討する。

$$\lim_{m\to\infty} \| \bar{U} - U \| \longrightarrow 0 \qquad m:\ \text{要素分割の数} \qquad (2)$$

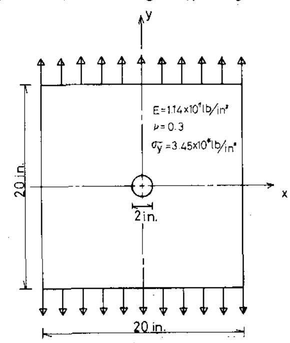


図-1 解析モデル

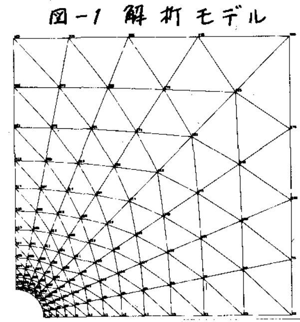


図-2 有限要素モデル

図-1,2に数値計算モデルおよび物性値と寸法を示した。 荷重は最大応力の降伏時荷重の2倍まで載荷し初期荷重法により計算した。 荷重増分は降伏時荷重の0.1, 0.2, 0.3 倍の3ケースを行った。 図-3では荷重-直応力の関係で分割数を変えた場合、図-4は同じく荷重増分を変えた場合のものである。

図-3から明らかなように3, 6節点要素とも分割数が増えるに従い最も細いモデルの結果に収束する傾向を示しており、これは線形解析と類似している。

荷重増分の結果に対する影響は図-4よりないことが明らかであり両者の相違は最終的な結果を得る場合の全繰り返し数に出てくる。

2-2 数値誤差について

数値的な誤差の生ずる要因を検討するに当り応力-ひずみ関係を次のように表わす。第2項について、

$$\Delta\sigma = \left[\mathbb{I} - \frac{E\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right)^t}{H' + \left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right)^t E\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}} \right] E\,\Delta\varepsilon \qquad (3)$$

$H' = \Delta\bar{\sigma}/\Delta\bar{\eta}_p \ll E$のとき、接線剛性法では数値的に条件が悪くなる。 また弾性-塑性領域共に存在する場合には剛性マトリックスの条件数は悪くなり数値誤差の生ずる要因となる。[1]
初期荷重法では収束性の方に問題が生じてくる。

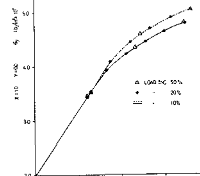


図-4 荷重-直応力の関係

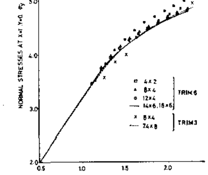


図-3 荷重-直応力の関係

2-3 収束性について[2]

初期荷重法における繰り返し数と荷重増分との関係を表-1に示した。表より最終状態の解を得る場合には荷重増分を粗くとることにより繰り返し計算の数を減らすとともに計算時間の節減が可能であることがわかる。

MESH 16 x 6		LOAD										
		1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
LOAD inc.	0.1		7	7	8	9	12	13	11	11	14	14
	0.2			7		8		13		12		16
	0.5						11					16

表－1 荷重増分と繰り返し数

3. 幾何学的非線形問題

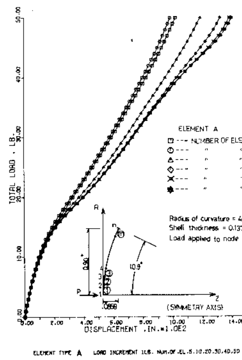
3-1 考えられる誤差の要因

大規模な問題の場合、繰返し法で収束させる計算は、経済上不可能になる場合が多い。それ故、ここでは増分法を用いた場合について考察する。

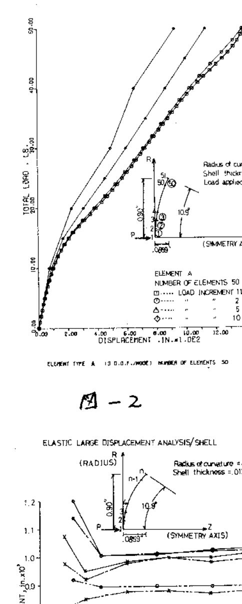
幾何学的非線形において、Lagrangian Formulationに基づいて、有限要素式を導き[3]、これを表わすと、$(K_o + K_u + K_\sigma)\,dU = dR$ となる。適合近似であるとすれば $\lim_{m\to\infty}\|\bar{U}-U\|\to 0$ であろう。線形解析において、適合要素を用いれば $\lim_{m\to\infty}\|\bar{U}_L-U_L\|\to 0$ は明らかである。このことはまた非線形項 K_u, K_σ をより良い物にすると思われる。ここで上式を増分形で表示すると離散化誤差として、荷重方向の分割もまた問題になるであろう。それ故、増分形による幾何学的非線形解析においては $\lim_{\substack{m\to\infty\\ \Delta R\to 0}}\|\bar{U}_N-U\|\to 0$ と推測される。次にこのことを数値実験の結果から検討する。

3-2 数値実験と考察

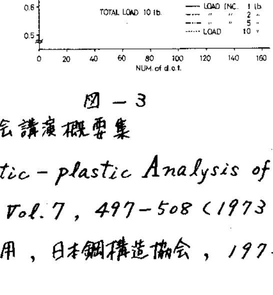
幾何学的非線形解析を行う構造モデルとして、ここでは軸対称シェル・エレメントを用い、球の一部を切り出したモデルを考え、極点(Node1 図1,2,および3共通)に集中荷重を載荷したときの、その点の変位に着目した。この数値実験においては、弾性一幾何学的非線形とし、パラメターとしては、$\lim_{\substack{m\to\infty\\ \Delta R\to 0}}\|\bar{U}_N-U_N\|\to 0$ を確かめるために、要素分割数および荷重方向の分割数の2通りとした。図-1に示してあるのは、ΔR は一定とし m を大きくしていったときの荷重一変位曲線である。この図から分るように、極端に m の小さい場合は除外して、ある一定値に落ち着いて行く傾向をはっきりと把むことができる。 図－2に示してあるのは、図－1とは逆に、m は一定とし ΔR を小さくしていった時の図である。ΔR は各増分毎一定とした。除々にある一定値に近づく様子が伺える。図－3にはエレメントAより高次のエレメントBを加え、m を大きくしていったときの、各々の ΔR で $R=10$ ポンド載荷時におけるNode1の変位量の推移を示している。このシェル構造に対する44通りの計算から、有限要素法を用いて、幾何学的非線形を行う際は、構造物をある程度のメッシュに分割したならば、後は荷重増分の如何に依るのではないかと思われる。



図－1



図－2



図－3

4. 参考文献

[1] 武田洋"有限要素法と数値誤差について" 土木学会、第26回年次学術講演会講演概要集

[2] Y. Yamamoto "Rate of Convergence for the Iterative Approach in Elastic-plastic Analysis of Continua" Int. J. for Num. Method in Engineering. Vol. 7, 497-508 (1973)

[3] 武田洋"非線形解析のコンピュータプログラムについて" 有限要素法の応用，日本鋼構造協会，1975