I-37　有限要素法による形状の表現について

センチュリリサーチセンタ(株)　正員　武田　洋

1. 序文

有限要素法により固体力学，流体力学などの連続体力学の問題を解析する場合，その形状は有限要素の集合からなるものとされ，場の支配方程式に関する未知および既知の関数はその要素上に制限され近似，離散される。離散近似された支配方程式（有限要素式）を組み立てる際に，一般には要素の形状および近似関数は節点における位置および関数のパラメータにより補間される。　補間のための関数を導入する際に，数値積分とも関連して正規化された座標系（固有座標系）が広く用いられている。　ここではこの固有座標系を用いて，要素の形状の測度を導入するとともに，運動の記述を整理することを目的とする。

2. 座標系と形状

ここでは有限要素の形状および運動を記述するために次の3つの座標系を導入する（図1参照）。

- 固有座標系　　ξ_α　$(\alpha = 1, 2, 3)$
- Lagrange 座標系　X_I　$(I = 1, 2, 3)$
- Euler座標系　　x_i　$(i = 1, 2, 3)$

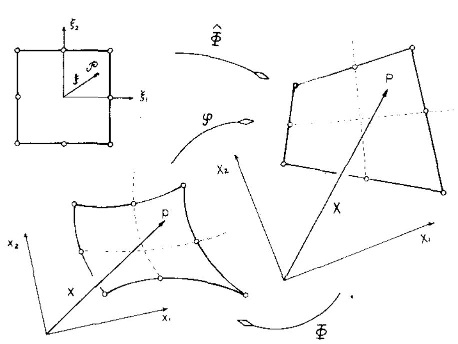

図1　有限要素と座標系

固有座標系 ξ_α は有限要素の形状および運動を補間するためのものであり，Lagrange座標系 X_I とEuler座標系 x_i は変形前および変形後の形状を基準にして運動を記述するためのものである。

変形前・後の形状は次式によって表わせるものとする。

$$
\begin{aligned}
X_K &= \hat{\Phi}_\Delta(\xi)\,\hat{X}_{\Delta K} \\
x_k &= \hat{\varphi}_\delta(\xi)\,\hat{x}_{\delta k}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ここでの表示は参考文献[1]に従うものとする。　なおここでは簡単のため，形状関数 $\hat{\Phi}, \hat{\varphi}$ についてはHermite補間のような高次補間は考えない。

有限要素の形状に対する測度を導入するために，次のような広義な意味での距離を考える。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= d\boldsymbol{\xi}\cdot d\boldsymbol{\xi} = \delta_{\alpha\beta}\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta \\
dS^2 &= d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} = \delta_{IJ}\,dX_I\,dX_J \\
d\sigma^2 &= d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} = \delta_{ij}\,dx_i\,dx_j
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

ここで(1)を考慮に入れることにより次式を得る。

$$
\begin{aligned}
dS^2 &= \delta_{IJ}\,\hat{X}_{\Delta I}\,\hat{X}_{\Gamma J}\,d\hat{\Phi}_\Delta\,d\hat{\Phi}_\Gamma \\
&= \delta_{IJ}\,\hat{X}_{\Delta I}\,\hat{X}_{\Gamma J}\,\frac{\partial\hat{\Phi}_\Delta}{\partial\xi_\alpha}\cdot\frac{\partial\hat{\Phi}_\Gamma}{\partial\xi_\beta}\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta \\
&= Z_{\alpha\beta}\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta
\end{aligned}
\qquad (3)_1
$$

$$
\begin{aligned}
d\sigma^2 &= \delta_{ij}\,\hat{x}_{\delta i}\,\hat{x}_{\gamma j}\,d\hat{\varphi}_\delta\,d\hat{\varphi}_\gamma \\
&= \delta_{ij}\,\hat{x}_{\delta i}\,\hat{x}_{\gamma j}\,\frac{\partial\hat{\varphi}_\delta}{\partial\xi_\alpha}\cdot\frac{\partial\hat{\varphi}_\gamma}{\partial\xi_\beta}\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta \\
&= z_{\alpha\beta}\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta
\end{aligned}
\qquad (3)_2
$$

テンソル $Z_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$ は固有座標系からLagrage およびEuler座標系への拡大率を表わすものである。上式より，変形前・後の形状に対する測度として，連続体力学における変形の測度としてのひずみテンソルと類似のテンソルを導入できる。

$$
\begin{aligned}
dS^2 - ds^2 &= (Z_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta = D_{\alpha\beta}\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta \\
d\sigma^2 - ds^2 &= (z_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta = d_{\alpha\beta}\,d\xi_\alpha\,d\xi_\beta
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

3. ひずみテンソル

連続体力学におけるひずみテンソルの定義としては(ds^2-dS^2)を基本にしている。(3)より

$$(ds^2-dS^2)=(g_{\alpha\beta}-G_{\alpha\beta})d\xi_\alpha d\xi_\beta=\varepsilon_{\alpha\beta}d\xi_\alpha d\xi_\beta \quad (5)$$

一方、連続体力学の定義より

$$(ds^2-dS^2)=E_{KL}\,dX_K\,dX_L=e_{kl}\,dx_k\,dx_l \quad (6)$$

ここでE_{KL}はLagrangeのひずみテンソル、e_{kl}はEulerのひずみテンソルである。(5),(6)より次式が成立する。

$$E_{KL}=\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial X_K}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial X_L}\qquad e_{kl}=\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial x_l} \quad (7)$$

一方、変形後および変形前の位置は次のように表わせる。

$$\begin{aligned}x_I&=X_I+U_I=\hat{\Phi}_\Delta\hat{X}_{\Delta I}+\Phi_\Delta\hat{U}_{\Delta I}\\ X_i&=x_i-u_i=\hat{\varphi}_\delta\hat{x}_{\delta i}-\varphi_\delta\hat{u}_{\delta i}\end{aligned} \quad (8)$$

ここで簡単のためisoparametric補間($\hat{\Phi}_\Delta=\Phi_\Delta$)の場合について整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}ds^2&=d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}=\delta_{ij}dx_i dx_j=\delta_{ij}\delta_{iI}\delta_{jJ}dx_I dx_J\\&=\delta_{IJ}(\hat{X}_{\Delta I}+\hat{U}_{\Delta I})(\hat{X}_{\Gamma J}+\hat{U}_{\Gamma J})\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_K}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_L}dX_K dX_L\\ dS^2&=d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}=\delta_{IJ}dX_I dX_J=\delta_{IJ}\delta_{Ii}\delta_{Jj}dX_i dX_j\\&=\delta_{ij}(\hat{x}_{\delta i}-\hat{u}_{\delta i})(\hat{x}_{\gamma j}-\hat{u}_{\gamma j})\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_l}dx_k dx_l\end{aligned} \quad (9)$$

また明らかに次式が成立する。

$$\begin{aligned}dS^2&=d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}=\delta_{IJ}\hat{X}_{\Delta I}\hat{X}_{\Gamma J}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_K}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_L}dX_K dX_L\\ ds^2&=d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}=\delta_{ij}\hat{x}_{\delta i}\hat{x}_{\gamma j}\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_l}dx_k dx_l\end{aligned} \quad (10)$$

従ってひずみテンソルは次のようになる。

$$\begin{aligned}E_{KL}&=\frac{1}{2}\delta_{IJ}(\hat{X}_{\Delta I}\hat{U}_{\Gamma J}+\hat{U}_{\Delta I}\hat{X}_{\Gamma J}+\hat{U}_{\Delta I}\hat{U}_{\Gamma J})\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_K}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_L}\\ e_{kl}&=\frac{1}{2}\delta_{ij}(\hat{x}_{\delta i}\hat{u}_{\gamma j}+\hat{u}_{\delta i}\hat{x}_{\gamma j}-\hat{u}_{\delta i}\hat{u}_{\gamma j})\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_l}\\ \varepsilon_{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}\delta_{IJ}(\hat{X}_{\Delta I}\hat{U}_{\Gamma J}+\hat{U}_{\Delta I}\hat{X}_{\Gamma J}+\hat{U}_{\Delta I}\hat{U}_{\Gamma J})\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial\xi_\beta}\\&=\frac{1}{2}\delta_{ij}(\hat{x}_{\delta i}\hat{u}_{\gamma j}+\hat{u}_{\delta i}\hat{x}_{\gamma j}-\hat{u}_{\delta i}\hat{u}_{\gamma j})\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\xi_\beta}\end{aligned} \quad (11)$$

ここで$(\partial\Phi_\Delta/\partial X_K)\hat{X}_{\Delta I}=\delta_{KI}$, $(\partial\varphi_\delta/\partial x_k)\hat{x}_{\delta i}=\delta_{ki}$であることを考慮に入れることにより(11)は次のようにも表わせる。

$$\begin{aligned}E_{KL}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_L}\hat{U}_{\Gamma K}+\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_K}\hat{U}_{\Delta L}+\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_K}\hat{U}_{\Delta I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_L}\hat{U}_{\Gamma I}\right)\\ e_{kl}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_l}\hat{u}_{\gamma k}+\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_l}\hat{u}_{\delta l}-\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_k}\hat{u}_{\delta i}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_l}\hat{u}_{\gamma i}\right)\end{aligned} \quad (12)$$

これは連続体力学のひずみテンソルの変位成分による表示に、有限要素の変位補間を代入して得られるものと同一となる。しかし、一般に用いられている(12)の代りに(11)を採用することにより、有限要素方程式におけるひずみテンソルの高次項の評価が明確となる。さらに、幾何学的非線形解析の定式において、微少変位の剛性マトリックス、初期応力の剛性マトリックスおよび初期変位の剛性マトリックスの関連が明らかとなる。

4. 増分形での有限要素式

(11)を応用した例としてLagrange表示されたエネルギーバランス方程式を増分形になおすと次のようになる。

$$\int_V\Sigma_{IJ}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_J}dV\,\delta\hat{U}_{\Delta K}+\int_V\delta\Sigma_{IJ}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_J}dV\,(\hat{X}_{\Delta K}+\hat{U}_{\Delta K}+\delta\hat{U}_{\Delta K})=\delta P_{\Gamma K} \quad (13)$$

ここで構成方程式 $\delta\Sigma_{IJ}=C_{IJLM}\delta E_{LM}$ を考慮すると(13)は次のようになる。

$$\int_V\Sigma_{IJ}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_J}dV\,\delta\hat{U}_{\Delta K}+\delta\hat{U}_{BN}(\hat{X}_{AN}+\hat{U}_{AN})\times\int\frac{\partial\Phi_A}{\partial X_L}\frac{\partial\Phi_B}{\partial X_M}C_{IJLM}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_J}dV\,(\hat{X}_{\Delta K}+\hat{U}_{\Delta K}+\delta\hat{U}_{\Delta K})=\delta P_{\Gamma K} \quad \cdots\cdots (14)$$

さらに線形弾性材料の場合には(14)の左辺第1項(初期応力の項)も次のように表わせる。

$$\int_V\Sigma_{IJ}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_J}dV=\int_V\frac{\partial\Phi_A}{\partial X_L}\frac{\partial\Phi_B}{\partial X_M}C_{IJLM}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_J}dV\times(\hat{X}_{AN}+\frac{1}{2}\hat{U}_{AN})\hat{U}_{BN} \quad (15)$$

(14),(15)より要素特性は次の配列より導びかれる。

$$K_{AB\Delta\Gamma}=\int_V\frac{\partial\Phi_A}{\partial X_L}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_M}C_{IJLM}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial X_I}\frac{\partial\Phi_\Gamma}{\partial X_J}dV \quad (16)$$

5. 参考文献

[1] 武田"有限要素法による運動の表現について"土木学会大会49年