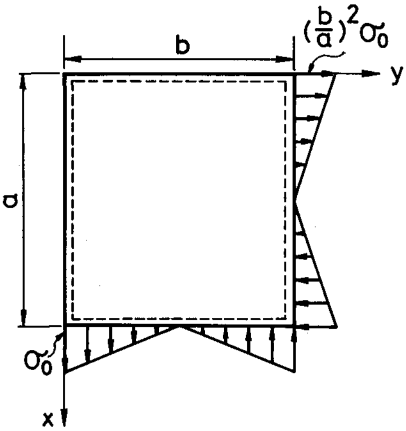
I-36　　ラーメン直隅角部腹板の幾何学的非線形挙動

関西大学工学部　正会員　○堂垣　正博
関西大学工学部　正会員　　三上　市蔵
関西大学工学部　正会員　　米沢　　博

まえがき　近年，構造物の幾何学的あるいは材料的非線形問題の解析が年毎に盛んになり，その成果の一部は設計基準に取り入れられているものもある。そのうちで平板の幾何学的非線形問題については，かなりの研究が古くからなされているが，これらの研究も相対する２辺に圧縮力を受ける長方形板とか，曲げ・せん断を受ける板などが多く，ラーメン直隅角部腹板を対象とした研究はあまり見あたらないようである。ここでは初期変形を有するラーメン直隅角部腹板を対象に２隣辺に応力を，他の２隣辺に面内変位拘束を与えた場合の非線形挙動の解析を試みた。

基礎微分方程式　図－１は曲げを受けるラーメン直隅角部腹板を示し，$x=a$ の辺および $y=b$ の辺に面内応力が作用し，$x=0$ の辺および $y=0$ の辺が x，y 両方向に面内変位拘束された場合を考える。一般にこの種の問題を解析する場合には，板の大たわみ理論に基づきたわみ w と Airy の応力関数 F を未知量とする非線形連立偏微分方程式を解くことが多い。ところが，境界条件が変位で与えられる場合，または応力と変位とで与えられる場合には，境界条件の取り扱いがかなり複雑になる。このような場合には未知量 F の代りに変位 u，v を未知量として用いると解析しやすくなる。本研究では u，v，w を未知量とする非線形連立偏微分方程式を誘導し，解析した。



図－1

初期たわみを有する場合，つり合い式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left\{\nu+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}\right\}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right\}-\left\{\nu+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\right\}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x\partial y}+\left\{\nu+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\right\}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} \quad (1)$$

$$\left\{\nu+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}\right\}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right\}-\left\{\nu+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\right\}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x\partial y}+\left\{\nu+\frac{(1-\nu^2)G}{E}\right\}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} \quad (2)$$

$$\nabla^4\bar{w}=\nabla^4 w_0+\frac{Eh}{D(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+\nu\left\{\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right\}\right]+\frac{Eh}{D(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2+\nu\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right\}\right]+\frac{2Gh}{D}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \quad (3)$$

ここに，$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ，w_0 は初期たわみ，$\bar{w}$ は初期たわみと付加たわみの和，hは板厚，Eは弾性係数，Gはせん断弾性係数，νはポアソン比，Dは板の曲げ剛さである。

境界条件式　境界条件としては，曲げに関しては全辺で単純支持されているものとし，膜作用に関しては$x=0$の辺および$y=0$の辺でxおよびy方向変位ゼロ，$x=a$の辺および$y=b$の辺でせん断力ゼロと$x=a$辺ではx方向膜力が外力に，$y=b$辺ではy方向膜力が外力に等しいという条件を用いる。すなわちつぎのようになる。

1). 曲げに関する境界条件式

$$\bar{w}=w_0=0 \quad , \quad \frac{d^2\bar{w}}{dn^2}-\frac{d^2w_0}{dn^2}=0 \tag{4}$$

ここに，nは境界辺に対して法線方向を表わしている。

2). 膜作用に関する境界条件式

(1) $x=0$の辺および$y=0$の辺において

$$u=v=0 \tag{5}$$

(2) $x=a$の辺において

$$\sigma_{mx}=(1-2y/b)\sigma_0 \quad , \quad \tau_{mxy}=0$$

すなわち，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1-\nu^2}{E}(1-2\frac{y}{b})\sigma_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 , \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{6}$$

(3) $y=b$辺において

$$\sigma_{my}=(b/a)^2(1-2x/a)\sigma_0 \, , \quad \tau_{mxy}=0$$

すなわち，

$$\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1-\nu^2}{E}\left(\frac{b}{a}\right)^2(1-2\frac{x}{a})\sigma_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 , \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{7}$$

ここに，σ_0 はx方向の引張縁応力である。

数値計算

1). 無次元量　計算の便宜上つぎのような無次元量を用いて数値計算を行なった。

$\alpha=a/b$，$\bar{W}=\bar{w}/h$，$W_0=w_0/h$，$U=ub/h^2$，$V=vb/h^2$，$\tilde{\sigma}_0=\sigma_0/\sigma_e$，$\tilde{\sigma}_{mx}=\sigma_{mx}/\sigma_e$，$\tilde{\sigma}_{my}=\sigma_{my}/\sigma_e$，$\tilde{\tau}_{mxy}=\tau_{mxy}/\sigma_e$． ここに $\sigma_e=\pi^2D/b^2h$である。

2). 計算方法　基礎微分方程式(1),(2)および(3)は非線形連立偏微分方程式であるので，解析的に解くことは困難であるので差分法と反復法を用いて近似的に解くことにした。ところで，未知数はu, v, $\bar{w}$の3種であり，反復を行なう場合，u, vに対しては式(1),(2)を連立させて解き，$\bar{w}$に対しては式(3)を解く。以下にその手順を述べる。

Step. 1：$\bar{w}$の初期値（たとえばw_0）を適当に仮定する。

Step. 2：基礎方程式(1),(2)と境界条件式(5)～(7)とから，未知量u, vを求める。その際式(1),(2)の右辺の非線形項は仮定された$\bar{w}$に対して計算する。

Step. 3：基礎方程式(3)と境界条件式(4)とから，未知量$\bar{w}$を求める。その際式(3)の右辺の非線形項は仮定値$\bar{w}$とStep. 2で得られたu, vを用いて計算する。

Step. 4：計算値と仮定値が所定の精度で一致しなければ，$\bar{w}$を仮定し直し，Step. 2～4の手順を繰り返す。仮定し直す際には，収束を早めるため，加速パラメーターを用いる方法またはAitkenの外挿法などを適宜用いる。

なお，数値計算結果については講演会当日に述べる。