I-30　差分方程式による一般的な連続桁の解析法

琉球大学　正員　大 城　武
琉球大学　正員　○渡嘉敷 直彦

序論：　連続桁の解法は、種々の方法により確立されているが、ここに提案する解法は、体系的に解法として不十分である差分方程式の応用を述べている。全スパンが等剛比をもつ様な連続桁については、定数係数をもつ連立差分方程式として取り扱い、その解を有限フーリエ級数により求め、又その他の場合には、変数係数をもつ連立差分方程式とし、"Walk-through Method" により数値解を求めている。

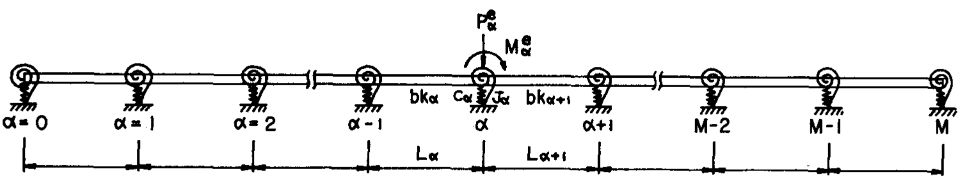

Fig. 1　Continuous Beam with Spring Constraints

Equations of Equilibrium：　一般的な連続桁として、Fig.-1に示している場合について基礎式を求める。支点における拘束として、垂直変位に対して C_α (kg/cm) 及び、回転に対して J_α (kg·cm/rad.)のバネ係数を仮定している。支点(α)の釣合いは、Fig.-2(b) に示してある。ここに、$M_\alpha^R, M_\alpha^L, V_\alpha^R$, 及び V_α^L は、たわみ角公式により求まる。支点(α)におけるモーメント，及び，セン断力の釣合い式は、図よりわかり、それらにたわみ角公式を代入し、無次元化してその式を書くと次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\bar{k}_{\alpha+1}\theta_{\alpha+1}+(2\bar{k}_{\alpha+1}+2+J'_\alpha)\theta_\alpha+\theta_{\alpha-1}-\frac{3\bar{k}_{\alpha+1}}{\beta_{\alpha+1}}\bar{Y}_{\alpha+1}+\frac{3\bar{k}_{\alpha+1}}{\beta_{\alpha+1}}\bar{Y}_\alpha-3(\bar{Y}_\alpha-\bar{Y}_{\alpha-1})=\bar{M}_\alpha^e\\&-\frac{\bar{k}_{\alpha+1}}{\beta_{\alpha+1}}\theta_{\alpha+1}-\left(\frac{\bar{k}_{\alpha+1}}{\beta_{\alpha+1}}-1\right)\theta_\alpha+\theta_{\alpha-1}+\frac{2\bar{k}_{\alpha+1}}{\beta_{\alpha+1}^2}\bar{Y}_{\alpha+1}-\left(\frac{2\bar{k}_{\alpha+1}}{\beta_{\alpha+1}^2}+2\right)\bar{Y}_\alpha-C'_\alpha\bar{Y}_\alpha+2\bar{Y}_{\alpha-1}=-\bar{P}_\alpha^e\end{aligned}\right\}\quad(1a,b)$$

同様な関係式は、両端(α=0,M)においても書けるが、支点α=0における結果を書くと次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\bar{k}_1\left[2\theta_0+\theta_1-\frac{3}{\beta_1}(\bar{Y}_1-\bar{Y}_0)\right]+J'_0\theta_0=\bar{M}_0^e\\&\frac{2\bar{k}_1}{\beta_1^2}(\bar{Y}_1-\bar{Y}_0)+C'_0\bar{Y}_0-\frac{\bar{k}_1}{\beta_1}\theta_1-\frac{\bar{k}_0}{\beta_1}\theta_0=-\bar{P}_0^e\end{aligned}\right\}\quad(2a,b)$$

Closed Form Solution：　各スパンの剛比，長さ，及び，スプリング係数を一定と仮定すれば、有限フーリエ級数解を得る。ここで、両支点上のスプリング係数(C'_0, C'_M, J'_0, J'_M)は、内側支点のそれらと等しくなる必要はない。上記の仮定($\beta_\alpha=1, \bar{k}_\alpha=1$)を式(2a,b)に代入すると　($1\leq\alpha\leq M$)

$$(\nabla+6+J')\theta_\alpha-3\boxminus\bar{Y}_\alpha=\bar{M}_\alpha^e,\quad -\boxminus\theta_\alpha+(2\nabla-C')\bar{Y}_\alpha=-\bar{P}_\alpha^e\quad(3a,b)$$

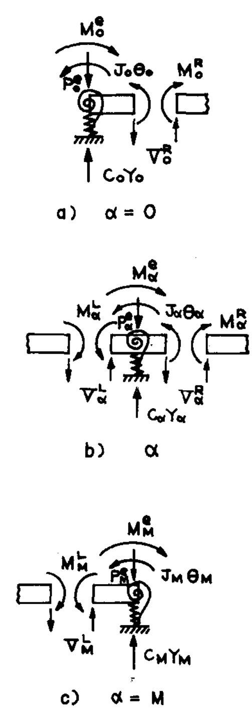

Fig. 2　Equilibrium at α=0,α,M

ここに、二階の差分記号∇及び$\boxminus$を次のように定義する。

$\nabla\theta_\alpha=\theta_{\alpha+1}-2\theta_\alpha+\theta_{\alpha-1}$，　$\boxminus\bar{Y}_\alpha=\bar{Y}_{\alpha+1}-\bar{Y}_{\alpha-1}$，　境界条件式(2a,b)は、次のように書ける。

$$(\Delta+3+J'_0)\theta_0-3\Delta\bar{Y}_0=\bar{M}_0^e,\qquad(2\Delta-C'_0)\bar{Y}_0-2N\theta_0=-\bar{P}_0^e\qquad(4a,b)$$

ここに、一階の差分記号Δ，Nを次のように定義する。　$\Delta\bar{Y}_0=\bar{Y}_1-\bar{Y}_0$，　$2N\theta_0=\theta_1+\theta_0$

有限フーリエ級数により、外力を展開し、又同様な級数を、θ_α及び$\bar{Y}_\alpha$に仮定する。

$$\begin{bmatrix}\Theta_\alpha\\ \bar{M}^e_\alpha\end{bmatrix}=\sum_{m=0}^{M+1}\begin{bmatrix}\Theta_m\\ \bar{M}_m\end{bmatrix}\cos\lambda_m\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) \qquad \begin{bmatrix}\bar{Y}_\alpha\\ \bar{P}^e_\alpha\end{bmatrix}=\sum_{m=0}^{M+1}\begin{bmatrix}\bar{Y}_m\\ \bar{P}_m\end{bmatrix}\sin\lambda_m\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\qquad \lambda_m=\frac{m\pi}{M+1},\qquad \text{(5a, b, c, d)}$$

上記の級数にorthogonality relationを適用するのであるが、この条件は端部($\alpha=0, M$)を含めた範囲で満足される。従って、式(3a, b)の適用を両端まで拡大しなくてはならない。それに伴い、式(4a,b)の境界条件も改められる。上記の級数解は、その境界条件を満足しないので、修正を加えることにより解を得る。そのために、修正係数(λ^1, λ^2)を導入している。式の簡素化のために、M/2に対して対称のときのみを示す。

Modified Governing and Boundary Equations :

$$0\le\alpha\le M \qquad (\nabla+6+J')\Theta_\alpha-3B\bar{Y}_\alpha-\bar{M}^e_\alpha-2\lambda^1=0,\quad -B\Theta_\alpha+(2\nabla-C')\bar{Y}_\alpha+\bar{P}^e_\alpha-2\lambda^2=0 \qquad \text{(6a,b)}$$

$$\alpha=0 \qquad [\nabla+(J'_0-J')-3]\Theta_0+3\nabla\bar{Y}_0+\lambda^1=0,\quad [2\nabla-(C'_0-C')]\bar{Y}_0-2\mu\Theta_0+\lambda^2=0 \qquad \text{(7a, b)}$$

式(5a. b, c, d)を式(6a, b)及び, (7a, b)に代入すると、

$$\begin{bmatrix}2(\cos\lambda_m-1)+6+J' & -6\sin\lambda_m\\ 2\sin\lambda_m & 4(\cos\lambda_m-1)-C'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_m\\ \bar{Y}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{M}_m\\ -\bar{P}_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{4\Phi_m}{M+1}\cos\frac{\lambda_m}{2} & 0\\ 0 & \frac{4\bar{\Phi}_m}{M+1}\sin\frac{\lambda_m}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{bmatrix} \qquad \text{(8a,b)}$$

$$\sum_{m=0}^{M+1}\begin{bmatrix}(-3+J'_0-J')\cos\frac{\lambda_m}{2} & 6\sin\frac{\lambda_m}{2}\\ -2\cos\frac{\lambda_m}{2} & (4-C'_0+C')\sin\frac{\lambda_m}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_m\\ \bar{Y}_m\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{bmatrix} \qquad \text{(9a,b)}$$

上記の式(8a,b)を$[\Theta_m, \bar{Y}_m]^T$について解き、その値を式(9a,b)に代入し、index m について和を求めると、$[\lambda^1, \lambda^2]^T$が求まる。これを、式(8a,b)に入れることにより、境界条件を満足するオイラー係数Θ_m, $\bar{Y}_m$が求まる。

Walk-through Method による数値解 : この方法による数値解は、変数係数をもつ差分方程式の数値解法として、最も有効なものであるが、その適用が発表されていない。式(1a, b)から, $\Theta_{\alpha+1}$ 及び $\bar{Y}_{\alpha+1}$ について解くと、

$$\begin{aligned}\Theta_{\alpha+1}=\frac{1}{\bar{\kappa}_{\alpha+1}}\Big[&-(2\bar{M}^e_\alpha-3\beta_{\alpha+1}\bar{P}^e_\alpha)+(\bar{\kappa}_{\alpha+1}+4+3\beta_{\alpha+1}+2J'_\alpha)\Theta_\alpha+(2+3\beta_{\alpha+1})\Theta_{\alpha-1}\\ &-3(2+2\beta_{\alpha+1}+\beta_{\alpha+1}C'_\alpha)\bar{Y}_\alpha+6(1+\beta_{\alpha+1})\bar{Y}_{\alpha-1}\Big]\\ \bar{Y}_{\alpha+1}=\frac{1}{\bar{\kappa}_{\alpha+1}}\Big[&-(\beta_{\alpha+1}\bar{M}^e_\alpha-\beta^2_{\alpha+1}\bar{P}^e_\alpha)+(\beta_{\alpha+1}\bar{\kappa}_{\alpha+1}+2\beta_{\alpha+1}+\beta^2_{\alpha+1}+\beta_{\alpha+1}J'_\alpha)\Theta_\alpha\\ &+(\beta_{\alpha+1}+\beta^2_{\alpha+1})\Theta_{\alpha-1}+(\bar{\kappa}_{\alpha+1}-2\beta^2_{\alpha+1}-3\beta_{\alpha+1}-\beta_{\alpha+1}C'_\alpha)\bar{Y}_\alpha+(3\beta_{\alpha+1}+2\beta^2_{\alpha+1})\bar{Y}_{\alpha-1}\Big]\end{aligned} \qquad \text{(10a,b)}$$

端部($\alpha=0$)における境界条件は、式(2a, b)を適用し、他端($\alpha=M$)における条件式は、次のようになる。

$$\begin{aligned}&\bar{\kappa}_M\Big[2\Theta_M-\Theta_{M-1}-\frac{3}{\beta_{\alpha+1}}(\bar{Y}_M-\bar{Y}_{M-1})+J'_M\Theta_M=\bar{M}^e_M\\ &-2\frac{\bar{\kappa}_M}{\beta^2_M}(\bar{Y}_M-\bar{Y}_{M-1})-C'_M\bar{Y}_M+\bar{\kappa}_M\Theta_M+\bar{\kappa}_M\Theta_{M-1}=-\bar{P}^e_M\end{aligned} \qquad \text{(11a,b)}$$

特殊解として、Θ^p_1 及び $\bar{Y}^p_1$を仮定し、その値を式(2a, b)に代入すると、Θ^p_0 及び $\bar{Y}^p_0$ を得る。式(10a, b)において、$\alpha=1$ とおき、$\Theta^p_0, \Theta^p_1, \bar{Y}^p_0$, 及び $\bar{Y}^p_1$ を代入することにより、Θ^p_2 及び $\bar{Y}^p_2$ を得る。同様な計算を繰り返すことにより、Θ^p_M 及び $\bar{Y}^p_M$ を得る。同次解を求めるには、式(2a, b)及び、式(10a, b)の荷重項を0とおく。

上記と同様に同次解として、Θ^{h1}_1 及び $\bar{Y}^{h1}_1$ を仮定し、式(2a, b)及び式(10a, b)より、$\Theta^{h1}_0, \Theta^{h1}_2, \sim\Theta^{h1}_M$, $\bar{Y}^{h1}_0$, $\bar{Y}^{h1}_2, \sim\bar{Y}^{h1}_M$ を得る。次にΘ^{h1}_1 及び $\bar{Y}^{h1}_1$ と異なる Θ^{h2}_1 及び $\bar{Y}^{h2}_1$ を仮定し、同様に $\Theta^{h2}_0, \Theta^{h2}_2, \sim\Theta^{h2}_M$, $\bar{Y}^{h2}_0, \bar{Y}^{h2}_2, \sim\bar{Y}^{h2}_M$ を得る。ここで求める解を次のように書く。

$$\Theta_\alpha=\Theta^p_\alpha+C_1\Theta^{h1}_\alpha+C_2\Theta^{h2}_\alpha,\qquad \bar{Y}_\alpha=\bar{Y}^p_\alpha+C_1\bar{Y}^{h1}_\alpha+C_2\bar{Y}^{h2}_\alpha \qquad \text{(12a, b)}$$

上記の式より、Θ_M, Θ_{M-1}, $\bar{Y}_M$, $\bar{Y}_{M-1}$ を求め、境界条件式(11a, b)に、これらの値を代入することにより求まる。

参考文献： D.L. Dean & C.P. Ugarte, "Field Solutions for Two-Dimensional Frameworks"
Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press 1968, Vol.10
T. Wah & L.R. Calcote, "Structural Analysis by Finite Difference Calculus"
Van Nostrand Reinhold Co.