I-28　格子桁のDiscrete Field Analysis

琉球大学　正員　○大城　武
琉球大学　正員　渡嘉敷　直彦

序論： 格子桁には、種々の解法が提案され、それらの理論は実用化されている。ここで提案している解法は、finite difference calculusを用い、厳密解を求めようとしているもので、この様な解法は、古くから考えられてはいるが、合理的に解法として示されて来たのは近年である。T. Wah, 及び L.R. Calcote は、その著書に一解法を示しており、又D.L. Deanは、同様な方法で格子桁の解法を発表している。ここに述べる解法は、これらのものを修正して更に一般的な適用を考えるものである。

この解法は、偏差分方程式の有限フーリエ級数解（field solution）を求めることである。従来、有限フーリエ級数解は、境界条件を満足するときにのみ、厳密解と考えられていたのであるが、一般にはそのような級数は、特殊な場合を除き見つからない。ここでは、境界条件を満足するように、仮定した級数解を修正して、厳密解を得る方法を示している。

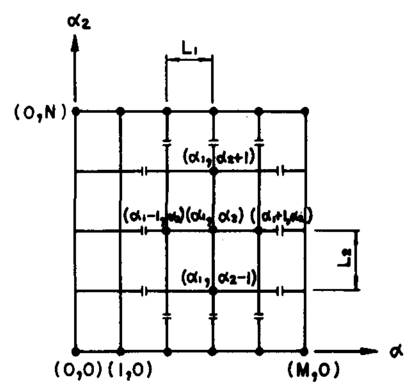

Fig. 1 Grillage Notations (size M×N)

Equations of Equilibrium： Fig.-1のような、M本主桁及びN本横桁の格子桁を考える。主桁及び横桁は、端部（$\alpha_2=0,N$）で単純支持されているものとし、他端（$\alpha_1=0,M$）においては、自由支持の状態を仮定している。横桁は、等しい曲げ及び捩り剛性をもつものとし、又内主桁には、等しい曲げ及び捩り剛性を仮定する。両端の外主桁は、内主桁と異なった剛性をもつことが出来る。

Fig.-1中の格点（α_1,α_2）と（α_1-1,α_2）の間にはさまれるはりをFig.-2に示しており、これに関する一般的なたわみ角公式は、次のように書ける。

$$M_1^R=-M_1^L=\frac{GJ}{L_1}\nabla_1\theta_1$$

$$\begin{bmatrix}M_2^R\\M_2^L\end{bmatrix}=b_1\frac{EI}{L_1}\begin{bmatrix}\gamma_1-\nabla_1 & -\frac{\gamma_1}{L_1}\nabla_1\\(1-\gamma_1)\nabla_1+\gamma_1 & -\frac{\gamma_1}{L_1}\nabla_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\w\end{bmatrix}\qquad(1a,b,c,d)$$

$$F^R=-F^L=b_1\frac{EI}{L_1}\frac{\gamma_1}{L_1}\left[(\nabla_1-2)\theta_2+\frac{2}{L_1}\nabla_1 w\right]$$

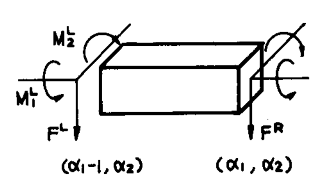

Fig. 2 Beam Element

ここに、Partial first back-ward difference operator及びBoole's displacement operatorを次のように定義する。

$$\nabla_1=1-E_1^{-1}\ ,\qquad E_1^{-1}f(\alpha_1,\alpha_2)=f(\alpha_1-1,\alpha_2)$$

格点（α_1,α_2）におけるモーメント及びせん断力は、Fig.-3に示してあり、これからつり合い条件式は容易に求まる。これに、たわみ角公式を代入し、無次元化すると（$1\leq\alpha_1\leq M-1,\ 1\leq\alpha_2\leq N-1$）

$$(\beta_1\Delta\!\!\nabla_1-\Delta\!\!\nabla_2-2\gamma_2)\theta_1-\gamma_2\beta_4\boxminus_2\overline{w}+\overline{M}_1^e=0$$

$$(\beta_2\Delta\!\!\nabla_2-\Delta\!\!\nabla_1-2\gamma_1)\theta_2+\gamma_1\boxminus_1\overline{w}+\overline{M}_2^e=0\qquad(2a,b,c)$$

$$\boxminus_1\theta_2-\beta_3\boxminus_2\theta_1-2(\Delta\!\!\nabla_1+\beta_3\beta_4\Delta\!\!\nabla_2)\overline{w}-\overline{F}^e=0$$

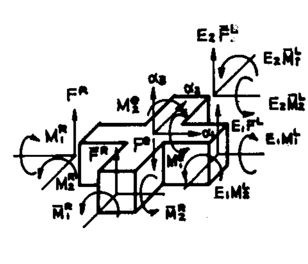

Fig. 3 Typical Node

ここで、Partial second order difference operatorを次のように定義する。

$$\Delta\!\!\nabla_1 f(\alpha_1,\alpha_2)=f(\alpha_1+1,\alpha_2)-2f(\alpha_1,\alpha_2)+f(\alpha_1-1,\alpha_2)$$

$\mathcal{B}_2 f(\alpha_1,\alpha_2) = f(\alpha_1,\alpha_2+1) - f(\alpha_1,\alpha_1-1)$

同様に端部におけるつり合い条件から、境界条件が次式のように与えられる。$\alpha_2=0$ ($1\le\alpha_1\le M-1$) における単純支持条件は、

$$\left(\frac{\beta_1}{2}\nabla_1 - \Delta_2 - \gamma_2\right)\theta_1 - \gamma_2\beta_4\Delta_2\overline{w} + \overline{M}_1^e = 0$$

$$(\beta_2\Delta_2 - \nabla_1 - 2\gamma_1)\theta_2 - \gamma_1\mathcal{B}_1\overline{w} + \overline{M}_2^e = 0 \qquad (3a,b,c)$$

$$w = 0$$

ここに、$\Delta_2 f(\alpha_1,\alpha_2) = f(\alpha_1,\alpha_2+1) - f(\alpha_1,\alpha_2)$

$\alpha_1=0$ ($1\le\alpha_2\le N-1$) における自由支持条件は、

$$-(-\beta_1\Delta_1 + \beta_5\nabla_2 + 2\beta_5\gamma_2)\theta_1 - \beta_5\gamma_2\beta_4\mathcal{B}_2\overline{w} + \overline{M}_1^e = 0$$

$$-(\Delta_1 + \gamma_2 - \beta_6\nabla_2)\theta_2 + \gamma_1\Delta_1\overline{w} + \overline{M}_2^e = 0 \qquad (4a,b,c)$$

$$-\beta_7\mathcal{B}_2\theta_1 + (\Delta_1+2)\theta_2 - 2(\Delta_1+\beta_7\beta_4\nabla_2)\overline{w} - \overline{F}^e = 0$$

差分方程式の厳密解は、式(2a,b,c),(3a,b,c)及び(4a,b,c)を満足することであるが、実質的にそのような解を求めることは不可能である。ここで提案している方法は、式(7),(8),(9)に示したような有限級数解を用いるのであるが、そのorthogonalityの範囲が、境界を含めた範囲で満足される。従って、式(2a,b,c)のGoverning Equationを4辺の境界を含めて拡大することである。それに伴って、式(3a,b,c)及び(4a,b,c)は式の形が変ってくる。同時に、Governing EquationとBoundary Conditionとを関連ずける修正係数を導入している。単純支持の境界条件は、変化した形で下記に示す級数により満足されるので、ここでは、自由端のみを示している。

Modified Governing Equations: $0\le\alpha_1\le M,\ 0\le\alpha_2\le N$

$$W_2\left[(\beta_1\nabla_1 - \nabla_2 - 2\gamma_2)\theta_1 - \gamma_2\beta_4\mathcal{B}_2\overline{w} + \frac{\overline{M}_1^e}{W} + \lambda_1\delta_{\alpha_1}^0 + \lambda_2\delta_{\alpha_1}^M\right] = 0$$

$$(\beta_2\nabla_2 - \nabla_1 - 2\gamma_1)\theta_2 + \gamma_1\mathcal{B}_1\overline{w} + M_2^e + \lambda_2\delta_{\alpha_1}^0 + \lambda_5\delta_{\alpha_1}^M = 0$$

$$\mathcal{B}_1\theta_2 - \beta_3\mathcal{B}_2\theta_1 - 2(\nabla_1+\beta_3\beta_4\nabla_2)\overline{w} - \overline{F}^e + \lambda_3\delta_{\alpha_1}^0 + \lambda_6\delta_{\alpha_1}^M = 0$$

$$(5a,b,c)$$

Modified Boundary Conditions: $\alpha_1=0,\ 1\le\alpha_2\le N-1$

$$[\beta_1\nabla_1 - (\beta_5+1)\nabla_2 - 2\gamma_2(\beta_5-1)]\theta_1 - \gamma_2\beta_4(\beta_5-1)\mathcal{B}_2\overline{w} - \lambda_1 = 0$$

$$[-\nabla_1 + \gamma_1 + (\beta_6-\beta_2)\nabla_2]\theta_2 + \gamma_1\nabla_1\overline{w} - \lambda_2 = 0$$

$$(\beta_3-\beta_7)\mathcal{B}_2\theta_1 + (2-\nabla_1)\theta_2 - 2[\nabla_1 + \beta_4(\beta_7-\beta_3)\nabla_2]\overline{w} - \lambda_3 = 0$$

$$(6a,b,c)$$

ここで級数解を次のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix}\theta_1(\alpha_1,\alpha_2)\\ \frac{\overline{M}_1^e}{W_2}(\alpha_1,\alpha_2)\end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{M+1}\sum_{n=0}^{N}\begin{Bmatrix}\theta^1_{mn}\\ M^1_{mn}\end{Bmatrix}\sin\lambda_m(\alpha_1+\tfrac{1}{2})\cos\lambda_n\alpha_2 \qquad (7a,b)$$

$$\begin{Bmatrix}\theta_2(\alpha_1,\alpha_2)\\ \overline{M}_2^e(\alpha_1,\alpha_2)\end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{M+1}\sum_{n=0}^{N}\begin{Bmatrix}\theta^2_{mn}\\ M^2_{mn}\end{Bmatrix}\cos\lambda_m(\alpha_1+\tfrac{1}{2})\sin\lambda_n\alpha_2 \qquad (8a,b)$$

$$\begin{Bmatrix}W(\alpha_1,\alpha_2)\\ F^e(\alpha_1,\alpha_2)\end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{M+1}\sum_{n=0}^{N}\begin{Bmatrix}W_{mn}\\ F_{mn}\end{Bmatrix}\sin\lambda_m(\alpha_1+\tfrac{1}{2})\sin\lambda_n\alpha_2 \qquad (9a,b)$$

$$\lambda_1 = \sum_{n=0}^{N}\lambda^1_n\cos\lambda_n\alpha_2,\quad \lambda_2 = \sum_{n=0}^{N}\lambda^2_n\sin\lambda_n\alpha_2,\quad \lambda_3 = \sum_{n=0}^{N}\lambda^3_n\sin\lambda_n\alpha_2 \qquad (10a,b,c)$$

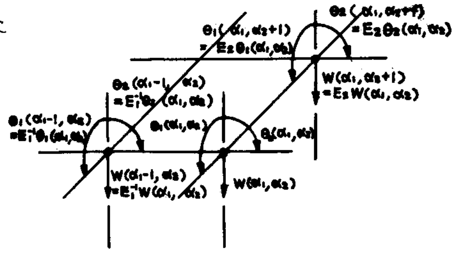

Fig. 4 Deformations at Nodes

ここで $\lambda_m = \frac{m\pi}{M+1}$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{N}$

上式を式(5a,b,c)及び(6a,b,c)に代入し、適当なorthogonality relationを用いると、式(5a,b,c)より、

$$\begin{bmatrix}H_1(m,n) & 0 & -2\gamma_2\beta_4\sin\lambda_n\\ 0 & H_2(m,n) & 2\gamma_1\sin\lambda_m\\ 2\beta_3\sin\lambda_n & -2\sin\lambda_n & H_3(m,n)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta^1_{mn}\\ \theta^2_{mn}\\ W_{mn}\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}\frac{4\overline{\Phi}_m}{M+1}\sin\frac{\lambda_m}{2}\lambda^1_n\\ \frac{4\Phi_m}{M+1}\cos\frac{\lambda_m}{2}\lambda^2_n\\ \frac{4\overline{\Phi}_m}{M+1}\sin\frac{\lambda_m}{2}\lambda^3_n\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}M^1_{mn}\\ M^2_{mn}\\ F_{mn}\end{Bmatrix} \qquad (11a,b,c)$$

$$H_1(m,n) = 2[\beta_1(\cos\lambda_m-1) - (\cos\lambda_n-1) - \gamma_2]$$

$$H_2(m,n) = 2[\beta_2(\cos\lambda_n-1) - (\cos\lambda_m-1) - \gamma_1]$$

$$H_3(m,n) = 4[(\cos\lambda_m-1) + \beta_3\beta_4(\cos\lambda_n-1)]$$

式(7a,b,c)より

$$\sum_{m=0}^{M+1}\begin{bmatrix}K_1(m,n) & 0 & -2\gamma_2\beta_4(\beta_5-1)\sin\lambda_n\sin\frac{\lambda_m}{2}\\ 0 & K_2(m,n) & 2\gamma_1\sin\frac{\lambda_m}{2}\\ -2(\beta_3-\beta_7)\sin\lambda_n\sin\frac{\lambda_m}{2} & 2\cos\frac{\lambda_m}{2} & K_3(m,n)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta^1_{mn}\\ \theta^2_{mn}\\ W_{mn}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^1_n\\ \lambda^2_n\\ \lambda^3_n\end{bmatrix} \qquad (12a,b,c)$$

式(11a,b,c)より$[\theta^1_{mn},\theta^2_{mn},W_{mn}]^T$について解き、その値を式(12a,b,c)に代入し、index mについて和を求めると$[\lambda^1_n,\lambda^2_n,\lambda^3_n]^T$が求まる。それを式(11a,b,c)に代入することにより$[\theta^1_{mn},\theta^2_{mn},W_{mn}]^T$が求まる。

参考文献： T. Wah & L.R. Calcote "Structural Analysis by Finite Difference Calculus" Van Nostrand Reinhold Co., 1970