I-26 変形法プログラムにおける影響線の求め方について

法政大学工学部 正 山下 清明
C.R.C.（株） 正○ 久保 文男

1．まえがき

移動荷重を対象とした構造物は影響線を用いて設計するのが普通である。 骨組構造の場合，影響線は変形，支点反力，断面力について求められる。 変形の影響線はMaxwellの相反定理を用いて構造物の弾性線より求められ，支点反力の影響線はMüller-Breslauの原理を用いて支点を反力方向に単位変位した構造物の弾性線より得られる。 断面力影響線の算定には次の解析法がよく利用される。

(1) 単位荷重法 ： 単位荷重が各載荷点に順次作用した解析を行い，着目量について整理し影響線を得る。

(2) 影響線行列法* ： 構造物の全体剛性行列の逆行列を計算し，この行列を利用して影響線行列を求める。

(3) Müller-Breslauの原理の利用** ： 着目量に対応した不連続点を構造に設け，この点の相対変位を単位変位量に保つとき，構造物の弾性線と影響線が相似であることを利用する。

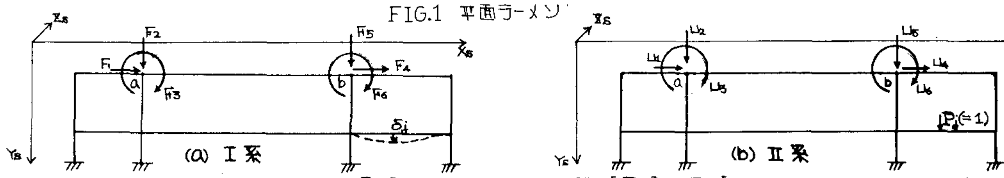
断面力影響線に関するこれらの手法を変形法を用いた解析プログラムに適用する場合，Müller-Breslauの原理を用いる解析では不連続点を構造に設けるので，構造が改造されたことになるため，全体剛性行列も着目量毎に更新される。 また影響線行列法では構造が大きく複雑になると逆行列演算で取扱う行列が大きくなり，計算手法とプログラミングが問題となる。 そこで変形法による影響線解析には単位荷重法がよく利用されている。
この手法では特定の影響線を算定する場合でも，荷重が移動する全域の荷重ケースの解析が必要である。 この解析結果を着目量について編集する後処理を経て影響線が求まる。

ここでは断面力の影響線を求める場合，便利に使用できる荷重系を提案し，その有用性を示す。

2．“影響荷重”の提案と証明

FIG.1の骨組構造に2つの力系が作用している。 それぞれをI系（力系$\mathbb{P}_I$，変位$\mathbb{U}_I$）とII系（$\mathbb{P}_{II}$,$\mathbb{U}_{II}$）とする。

FIG.1 平面ラーメン



$\mathbb{P}_I^T=[F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6]$, $\mathbb{U}_I^T=[\ \delta_j\ ]$　　$\mathbb{P}_{II}^T=[\ P_j\ ]$, $\mathbb{U}_{II}^T=[U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6]$

ここでδ_jは力系$\mathbb{P}_I$によってj点に生ずる変位であり，$\mathbb{U}_{II}$はj点に作用する単位荷重P_jによってa，b節点に生ずる変位ベクトルである。 I，II系にBettiの相反定理を適用すれば式(1)が得られる。

$$\mathbb{P}_I\mathbb{U}_{II}=\mathbb{P}_{II}\mathbb{U}_I\ ;\quad [F_1 --- F_6]\begin{bmatrix}U_1\\ \vdots\\ U_6\end{bmatrix}=1\times\delta_j \qquad \text{-----------(1)}$$

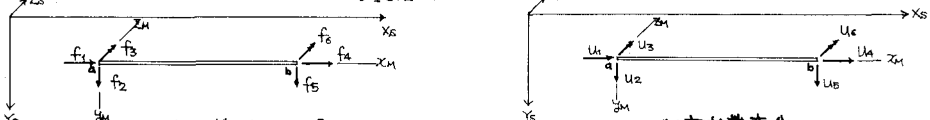
a-b部材の端断面力$\mathbb{f}$と端変位$\mathbb{u}$をFIG.2に示す。 部材の中間に荷重が作用していないとき端断面力$\mathbb{f}$と端変位$\mathbb{u}$の関係は部材剛性マトリックスを介して式(2)で表わされる。

$$\mathbb{f}=\mathbb{K}\cdot\mathbb{u}\ ;\quad \begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}---K_{16}\\ ------\\ K_{61}---K_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_6\end{bmatrix} \qquad \text{-------------(2)}$$

剛性行列$\mathbb{K}$の行要素に対応する単位変位を対角要素にもつ対角行列$\mathbb{I}_D$を導入して式(2)の両辺にかける。

$$\mathbb{I}_D\,\mathbb{f}=\mathbb{I}_D\mathbb{K}\,\mathbb{u}\ ;\quad \begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{11}---K_{16}\\ ------\\ K_{61}---K_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_6\end{bmatrix} \qquad \text{-----------(3)}$$

FIG.2 a-b部材



(a) 部材端断面力；$\mathbf{f}$　　(b) 部材端変位：$\mathbf{u}$

式(3)の右辺の行列積は力及びモーメントの次元を持つ要素の行列であり，これを$\mathbb{F}_i$とおけば式(3)は次式になる。

$$\mathbb{I}_b\mathbf{f} = \mathbb{F}_i\mathbf{u} \;:\; \begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{11} & \cdots & F_{16}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ F_{61} & \cdots & F_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_6\end{bmatrix} \qquad \text{-----------(4)}$$

部材端変位ベクトル$\mathbf{u}$をII系の変位ベクトル$\mathbb{U}_{II}$とし，行列$\mathbb{F}_i$のi行をI系の$\mathbb{P}_i$とすれば式(1)は式(5)に書き直す。

$$[F_{i1} \cdots F_{i6}]\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_6\end{bmatrix} = 1\times\delta_j. \qquad \text{-----------(5)}$$

よって式(4)の左辺のi番目の値と式(1)の右辺とは等しくなり式(6)が得られる。

$$1\times f_i = 1\times\delta_j \qquad \text{-----------(6)}$$

いま力系$\mathbb{P}_i$が行列$\mathbb{F}_i$のi行$[F_{i1}\cdots F_{i6}]$であるとき，構造物の弾性線は部材剛性行列のi行に対応する断面力f_iの影響線に一致する。すなわち次の法則を与えることができる。

断面力影響線はその着目量について"影響荷重"と規定した荷重系が作用する構造物の弾性線に一致する。

これは着目量の部材剛性行列と単位変位対角行列$\mathbb{I}_b$の積である"影響行列$\mathbb{F}_i$"の行要素で求められる。

ここで構造物座標系と部材座標系が一致しない場合，部材座標で表示した変形ベクトル$\mathbf{u}$は構造物座標で示す変形ベクトル$\mathbb{U}$と座標変換マトリックス$\mathbb{R}$を用いて式(7)で与える。

$$\mathbf{u} = \mathbb{R}^T\mathbb{U} \qquad \text{-----------(7)}$$

$\mathbb{R}$は部材座標から構造物座標への変換マトリックスである。式(4)の変形ベクトルが構造物座標で表示されるとき影響行列$\mathbb{F}_i$は式(7)を参照して式(8)の$\mathbb{F}_i'$に変換される。

$$\mathbb{F}_i' = \mathbb{F}_i\cdot\mathbb{R}^T \qquad \text{-----------(8)}$$

よって式(8)の座標の変換をうけた影響行列$\mathbb{F}_i'$の行要素を影響荷重として採用すればよい。a-b部材の中間に荷重が作用している場合，部材荷重による端断面力が加わるために式(2)は式(9)に書き直される。

$$\mathbf{f} = \mathbb{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_0 \qquad \text{-----------(9)}$$

$\mathbf{f}_0$は部材荷重によりa，b端に生ずる固定端断面力である。よって対象としている部材内に関する影響線を考える場合，式(6)は式(10)に書き直す。影響線値f_iは部材荷重によるf_{i0}の修正が必要である。

$$f_i = \delta_j + f_{i0} \qquad \text{-----------(10)}$$

3．解析上の特徴

(1) 断面力の構造全体に関する影響線が一つの荷重系に対する変位量として計算される。これは変位が表わされる座標方向の荷重に対応する断面力の影響線が同時に得られることを示している。

(2) Müller-Breslauの原理を利用する場合，不連続点の導入のために構造が不安定になり変形法の通常の解析ルーチンでは処理できないことがある。しかし本法では構造は変化しないので特別な扱いは不必要である。

(3) ここで示した荷重系は剛性行列の値を組み合わせたものだから，解析プログラムに容易に組み込まれる。

(4) 断面力や断面内の直応力のように断面力の線形結合として表わされるものの影響線は，結合状態を荷重系に反映しておくことで一回の変位計算で求まる。部材の縁応力などの検討も容易にできる。

(5) 連続体の解析をF.E.M.により行う場合，内部応力の影響線は有限要素の応力マトリックスを利用して影響荷重を考えることにより本手法が適用できる。

参考文献　(*) 大地：構造解析とコンピュータ，産業図書　(**) 村上他：構造力学　，コロナ社 など

法政大学工学部土木工学科　大地教授には適切な助言をいただき深く感謝します。