

1. まえがき

はり構造物の曲げ挙動を支配する微分方程式は、荷重強度、曲げ剛性、たわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力の六つの要素により構成される。これらの要素のいづれかが連続性あるいは一様性を失ったとき、微分方程式の直接積分によるはりの解法は、一般に繁雑を増す。しかしながら、これらの要素の不連続性、非一様性に起因する解析の困難は起函数の導入により回避することが可能である。Brown<sup>(1)</sup>は階段状変断面はりの解析にはじめにサイドの単位階段函数を用いた。Wang<sup>(2)</sup>は、さらに、変断面はりの解法への起函数の応用と一般化し、テーバーのついた部材の flexural constant の近似算法を提案した。

任意の変断面はりとは近似的に等価な階段状変断面はりに置換される。従来の変断面はりの諸解法は、この考え方に従い、階段状変断面はりの解法を応用して、近似解を求めた。したがって、多大の計算量を必要とする高精度の解をえよるためには電子計算機の助けが必要となる。本研究は、置換された階段状変断面はりの解において、この階段数と無限大に近づけることにより、任意の変断面はりの一般解を求めたものである。この一般解式を用いることにより変断面はり構造物の曲げに関する問題とそれの計算により、高精度の解析が可能である。

2. 基礎微分方程式

Bernoulli-Eulerの曲げ理論によれば、鉛直分布荷重  $q(x)$  および分布モーメント荷重  $\bar{m}(x)$  の作用を受け、直線部材の基礎微分方程式は

$$\frac{d\bar{Q}}{dx} = -q(x) \quad (1.a), \quad \bar{Q} = \frac{dM}{dx} - \bar{m}(x) \quad (1.b), \quad M = -EI(x) \frac{d\theta}{dx} \quad (1.c), \quad \theta = \frac{dy}{dx} \quad (1.d)$$

と与えられる。たわみ  $y$ 、たわみ角  $\theta$ 、曲げモーメント  $M$ 、せん断力  $\bar{Q}$  および鉛直荷重  $q$  の正負は図1とは通常規約に従い、モーメント荷重  $\bar{m}$  は時計回りを正とせよ。

直線部材軸と有する任意の変断面はりは  $n$  個の階段をもつ階段状変断面はりへの置換が常に可能である。置換はりの性状は近似的に元の変断面はりの性状を表わす。階段数  $n$  の増加は近似度の向上を意味し、 $n$  を無限大とした極限において両者は一致する。図1に示すごとく、 $n$  個の階段をもつはりの曲げ剛性  $EI(x)$  は、座標  $x$  の原点を左端にとれば、次式により一般表示される。

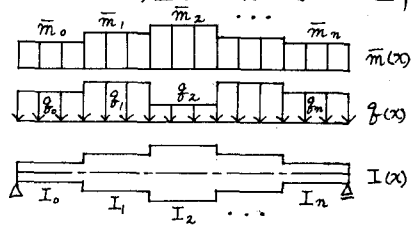


図-1

$$EI(x) = EI_0 \sum_{i=0}^n \nu_{2i} u(x-a_i), \quad \nu_{20} = 1, \quad \nu_{2i} = \frac{I_i}{I_0} - \frac{I_{i-1}}{I_0} \quad (2)$$

ここに、 $u(x-a_i)$  は単位階段函数である。  $I_0$  は左端断面の2次モーメントである。

鉛直荷重  $q(x)$  および分布モーメント荷重  $\bar{m}(x)$  は、曲げ剛性と同等に、次の各式にて一般表示される。

$$q(x) = q_0^* \sum_{i=0}^n \nu_{2i} u(x-a_i), \quad \nu_{2i} = \frac{q_i}{q_0^*} - \frac{q_{i-1}}{q_0^*}, \quad q_0^*: \text{基準鉛直荷重強度} \quad (3)$$

$$\bar{m}(x) = \bar{m}_0^* \sum_{i=0}^n \nu_{2i} u(x-a_i), \quad \nu_{2i} = \frac{\bar{m}_i}{\bar{m}_0^*} - \frac{\bar{m}_{i-1}}{\bar{m}_0^*}, \quad \bar{m}_0^*: \text{基準モーメント荷重強度} \quad (4)$$

式(1.a)~(1.f)より、無次元量  $\eta = x/l$ ,  $\xi_i = a_i/l$ ,  $\gamma = \bar{y}/l$ ,  $M = -\bar{M}l/EI_0$ ,  $Q = -\bar{Q}l^2/EI_0$  および  $m = \bar{m}l$  と用いて

$$\frac{dQ}{d\eta} = \frac{\bar{Q}l^2}{EI_0} \sum_{i=0}^n \nu_{2i} u(\eta-\xi_i) \quad (5.a), \quad Q = \frac{dM}{d\eta} + \frac{m_0^* l}{EI_0} \sum_{i=0}^n \nu_{2i} u(\eta-\xi_i) \quad (5.b), \quad M = \sum_{i=0}^n \nu_{2i} u(\eta-\xi_i) \quad (5.c), \quad \theta = \frac{d\gamma}{d\eta} \quad (5.d)$$

3. 変断面ばかりの一般解

連立微分方程式(5.0)~(5.4)の解に於いて、階段数 $n \rightarrow \infty$ 操作を行えば、次のごとく直線部材軸をもつ任意の変断面ばかりの一般解が知られる。

$$y(\eta) = y(0) + \theta(0)\eta + M(0) \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} (\eta-\xi) d\xi + Q(0) \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} \xi (\eta-\xi) d\xi + \frac{P^2}{EI_0} \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} (\eta-\xi) \int_0^\xi [2f(\xi)(\xi-\tau) - m(\tau)] d\tau d\xi \quad (6.9)$$

$$\theta(\eta) = \theta(0) + M(0) \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} d\xi + Q(0) \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} \xi d\xi + \frac{P^2}{EI_0} \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} \int_0^\xi [2f(\xi)(\xi-\tau) - m(\tau)] d\tau d\xi \quad (6.10)$$

$$M(\eta) = M(0) + Q(0)\eta + \frac{P^2}{EI_0} \int_0^\eta [2f(\xi)(\eta-\tau) - m(\tau)] d\tau d\xi \quad (6.11)$$

$$Q(\eta) = Q(0) + \frac{P^2}{EI_0} \int_0^\eta 2f(\xi) d\xi \quad (6.12)$$

4. 応用例 (1) 自由端集中荷重Pを受けし片持ばかり (図-2)

図-2に示す片持ばかりの変形を示す。固定端の曲げモーメント $M(0) = -Pl$ 、せん断力 $Q(0) = P$ と仮定す。  $M(0) = Pl^2/EI_0$ ,  $Q(0) = -Pl/EI_0$  とする。

$$y(\eta) = \frac{Pl^2}{EI_0} \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} (1-\xi)(\eta-\xi) d\xi, \quad \theta(\eta) = \frac{Pl^2}{EI_0} \int_0^\eta \frac{I(0)}{I(\xi)} (1-\xi) d\xi$$

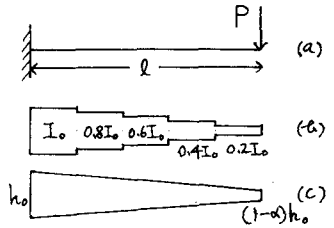


図-2

階段状変断面ばかりに於いて、2次モーメント比 $I(0)/I(\xi)$ は各一様節分にある一定値とす。図-2(c)の階段ばかりは図-2

$$y(1) = \frac{Pl^2}{EI_0} \left\{ \int_0^{0.2} (1-\xi)^2 d\xi + \frac{5}{4} \int_{0.2}^{0.4} (1-\xi)^2 d\xi + \frac{5}{3} \int_{0.4}^{0.6} (1-\xi)^2 d\xi + \frac{5}{2} \int_{0.6}^{0.8} (1-\xi)^2 d\xi + 5 \int_{0.8}^{1.0} (1-\xi)^2 d\xi \right\} = 1.27133 \frac{Pl^2}{3EI_0}$$

$$\theta(1) = \frac{Pl^2}{EI_0} \left\{ \int_0^{0.2} (1-\xi) d\xi + \frac{5}{4} \int_{0.2}^{0.4} (1-\xi) d\xi + \frac{5}{3} \int_{0.4}^{0.6} (1-\xi) d\xi + \frac{5}{2} \int_{0.6}^{0.8} (1-\xi) d\xi + 5 \int_{0.8}^{1.0} (1-\xi) d\xi \right\} = 1.54333 \frac{Pl^2}{2EI_0}$$

図-2(c)のごとく矩形断面の高さが直線的に変化する片持ばかりに於いては、 $I(0)/I(\xi) = 1/(1-d\xi)^3$  と仮定す。

$$y(1) = \frac{Pl^2}{EI_0} \int_0^1 \frac{(1-\xi)^2}{(1-d\xi)^3} d\xi, \quad \theta(1) = \frac{Pl^2}{EI_0} \int_0^1 \frac{(1-\xi)}{(1-d\xi)^3} d\xi$$

となる。これらの定積分は解析的に実行可能であるが、簡単な圧縮には数値積分を行う。Gaussの数値積分を用いた本法および階段状変断面ばかりへの置換法による自由端のたわみ $y(1)$ の精度を図-3に示す。

(2) 材端剛度、到達率および固定端モーメント

高さが直線的に変化し、右端Bの高さが左端Aの高さの3倍なる矩形断面部材ABの遠端比 $\gamma$ の材端剛度 $S_{ae}$ ,  $S_{ea}$ および遠端固定の材端剛度 $C_{ae}$ ,  $C_{ea}$ 、到達率 $\gamma_{ae}$ ,  $\gamma_{ea}$ および満載率分布荷重に対する固定端モーメント $C_{ae}$ ,  $C_{ea}$ に於いて、Gaussの5分割数値積分を行った本法および10分割の置換法による結果を表-1に示す。

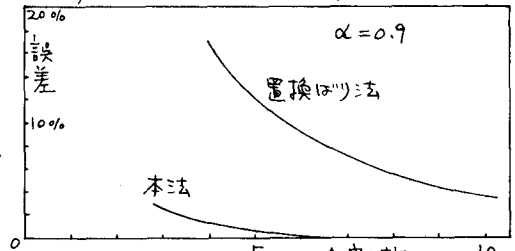


図-3

5. あとがき

直線部材軸を有する任意の変断面ばかりの一般解を示した。これにより、変断面ばかりの任意の変形および断面ばかり一般に定積分の形式で与えられる。これら2、数値積分法を用いることにより、変断面ばかりの曲げに肉付る高精度の解を、簡単な計算により求めることが可能である。

なお、本法においてせん断変形の影響を無視した。これを考慮した解も全く同様に求めらるべきである。

(参考文献)

(1) C. L. Brown "The Treatment of Discontinuities in Beam Deflection Problems," Quar. Appl. Math., vol. 1, Providence, R. I., 1943, P. 349  
 (2) S. L. Wang "Flexural Calculation of Nonuniform Members," ASCE, ST 6, 1963, P. 271

表-1

	$S_{ae}$	$S_{ea}$	$S_{ae}$	$S_{ea}$	$\gamma_{ae}$	$\gamma_{ea}$	$C_{ae}$	$C_{ea}$
置換法	7.45	37.87	9.89	50.26	1.120	0.220	0.0409	0.1445
本法	7.29	38.15	9.58	50.17	1.120	0.214	0.0393	0.1463
厳密解	7.28	38.13	9.57	50.13	1.119	0.214	0.0392	0.1466
係数	$EI_0/l$	$EI_0/l$	$EI_0/l$	$EI_0/l$	—	—	$-8l^2$	$8l^2$