

1. まえがき 3次元空間における骨組部材の弾性挙動を把握するためには、力と変形の関係とともに変位と歪の関係も正確に表現しなければならぬ。立体骨組構造物の有限変形問題をマトリックス法を用いて研究したものに、Tezcan & Mahapatra¹⁾、結城・前田²⁾、Oran³⁾等の研究があるが、いずれの研究においても座標変換及び歪の表示が厳密に行なわれていない。そこで、本報告では、3次元空間における有限な回転の扱い方と、骨組部材の歪の表現について説明する。

2. 有限回転 剛体の空間運動に関する基本的な性質により、有限な変位は平行移動と回転とに分けることができる。このうち、平行移動は一つのベクトルとして表わすことができるが、有限な回転はベクトル則には従わぬ。すなわち、二つの回転を合成する際、合成の順序を変えると結果が異なるために可換則が成立しない。したがって、回転変位の合成には回転行列を用いることにする。

剛体の回転に関するオイラーの定理により、節点はある空間ベクトル ϕ を中心とし、有限な角 α だけ回転する。いま、節点の全体座標系に関する回転成分を $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ とすると、ベクトル ϕ の全体座標系に対する方向余弦 (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) と角 α は次のようになる。

$$(\phi_x, \phi_y, \phi_z) = (\theta_x/\alpha, \theta_y/\alpha, \theta_z/\alpha) \quad (1)$$

$$\alpha = (\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)^{1/2} \quad (2)$$

図-1に示すように、ベクトル ϕ の方向に単位ベクトル e_3 をとリ、これと直交する右手系の単位ベクトル e_1, e_2 を図に示すように定める。このとき、節点に固定された任意のベクトル R と

$$R = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 \quad (3)$$

と表わせば、 ϕ を回転軸とし、角 α だけ回転したベクトル R^* は

$$R^* = (r_1 \cos \alpha - r_2 \sin \alpha) e_1 + (r_1 \sin \alpha + r_2 \cos \alpha) e_2 + r_3 e_3 \quad (4)$$

となる。上式を変形して

$$R^* = R \cos \alpha + r_3 (1 - \cos \alpha) e_3 + (r_1 e_2 - r_2 e_1) \sin \alpha \quad (5)$$

さらに、ベクトルとディアド(dyad)のスカラ-積の関係式を用いて変形すれば、次式のようなになる。

$$R^* = [E \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) e_3 e_3 + (e_2 e_1 - e_1 e_2) \sin \alpha] \cdot R \quad (6)$$

ここに、 E は単位行列、 $e_3 e_3, e_1 e_1, e_2 e_2$ はディアドを表わす。また、単位ベクトルのディアドを用いれば、

$$e_3 \times e_3 = e_3 \times (e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3) = (e_3 \times e_1) e_1 + (e_3 \times e_2) e_2 + (e_3 \times e_3) e_3 = e_2 e_1 - e_1 e_2 \quad (7)$$

の関係式が導ける。したがって、有限な回転に対する回転行列 R は、式(7)を式(6)に代入して求められる。

$$R = E \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) e_3 e_3 + e_3 \times E \sin \alpha \quad (8)$$

回転の合成は回転行列の積で表わされる。いま、 n 回の連続した回転によりベクトル R_0 が R_n になったとすれば

$$R_n = R_n R_{n-1} = (R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1) R_0 \quad (9)$$

式(8)の回転行列 R と、式(9)の回転行列の積は正規直交行列である。角 α が微小な場合には、式(8)は

$$\Delta R \approx E + e_3 \times E \alpha = E + \Delta \phi \times E \quad (10)$$

ここに、

$$\Delta \phi = (\Delta \theta_x, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z)^T \quad (11)$$

となるが、式(10)は正規直交行列ではない。式(10)を式(9)に代入して回転の合成を行なうとき、2次以上の微小項を省略すればベクトルの合成則が成立し、合成結果は回転の順序によらないことがわかる。すなわち、

$$\Delta R_n \cdots \Delta R_2 \Delta R_1 \approx \Delta R_1 \Delta R_2 \cdots \Delta R_n \approx E + (\Delta \phi_1 + \Delta \phi_2 + \cdots + \Delta \phi_n) \times E \quad (12)$$

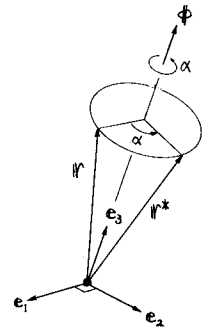


図-1

3. 部材座標とたわみ角 節点*i*に*a*端, 節点*j*に*b*端を持つ直線部材において, 部材座標の*x*軸を變形の前後とも部材両端の断面の重心点を結ぶ直線上にとり, この*x*軸に対して直交右手系を右まのようにし, *y, z*軸を定める。變形前において, *y, z*軸を断面の主軸方向に定め, この部材座標系を全体座標系に変換する行列を \mathbb{U}_0 で表わす。いま, 部材の両端*a, b*に固定され, 部材軸の方向と一致する2組の正規直交系を考へる。節点の回転により變形後はそれぞれ $(x_a^*, y_a^*, z_a^*), (x_b^*, y_b^*, z_b^*)$ になつたものとする。これらの直交座標軸の方向余弦をつつた行列をそれぞれ $\mathbb{U}_a^*, \mathbb{U}_b^*$ とすると, 節点*i, j*の回転行列 R_i, R_j を用いて次のように表わせる。

$$\mathbb{U}_a^* = R_i \mathbb{U}_0, \quad \mathbb{U}_b^* = R_j \mathbb{U}_0 \quad (13)$$

まず*a*端において, 變形後の*x*軸上に単位ベクトル x_a を考へ, 直交系 (x_a^*, y_a^*, z_a^*) を x_a^* と x_a とに直交する軸を回転軸とし, 角 α_a だけ回転させて x_a^* を x_a に一致させる。このとき, y_a^* 及び z_a^* はそれぞれ y_a 及び z_a になつたものとする。この回転軸の方向に単位ベクトル ϕ_a を考へると, 次の関係式が成立つ。

$$x_a^* \times x_a = \phi_a \sin \alpha_a \quad (14)$$

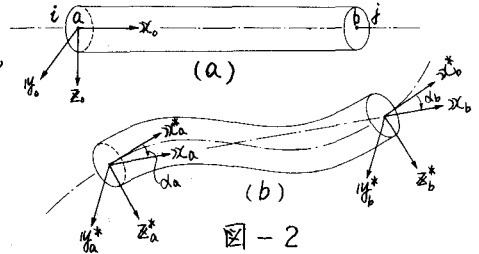


図-2

この回転を表わす行列 R_a を x_a^* と x_a のスカラー積とベクトル積を用いて, 式(8)より次のように表わせる。

$$R_a = (x_a^* \cdot x_a) E + (x_a^* \times x_a)(x_a^* \times x_a) / (1 + x_a^* \cdot x_a) + (x_a^* \times x_a) \times E \quad (15)$$

したがって, (x_a, y_a, z_a) の方向余弦をつつた行列 \mathbb{U}_a は, 式(13)より

$$\mathbb{U}_a = R_a \mathbb{U}_a^* = \Phi_a \mathbb{U}_0 \quad (\text{ここに, } \Phi_a = R_a R_i) \quad (16)$$

*b*端においても同様にして, (x_b, y_b, z_b) なる直交系を考へると

$$\mathbb{U}_b = \Phi_b \mathbb{U}_0 \quad (\text{ここに, } \Phi_b = R_b R_j) \quad (17)$$

*a*及び*b*端において, ベクトル y_a と z_a 及び y_b と z_b とが作る平面は互いに平行であるから, 角 $\widehat{y_a y_b} - \widehat{z_a z_b} = \phi$ とおくと, この角が部材のねじり角である。この値は, 次の関係式から求められる。

$$y_a \cdot y_b = z_a \cdot z_b = \cos \phi, \quad -y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b = \sin \phi \quad (18)$$

變形後の*y, z*軸を定めるために, *a, b*両端のねじり角 θ_a, θ_b も絶対値が等しく符号が反対になるように選ぶ。すなわち, $-\theta_a = \theta_b = \phi/2 = \theta$ とおけば, 變形後の座標変換行列 \mathbb{T} は \mathbb{U}_0 より変換して

$$\mathbb{T} = \Phi_a \mathbb{U}_0 R_\theta = \Phi_b \mathbb{U}_0 R_\theta^T \quad (19) \quad \text{ここに, } R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (20)$$

部材の両端におけるたわみ角は, 重心軸の接線ベクトル x_a^*, x_b^* の變形後の座標に対する方向余弦

$$(l_a, m_a, n_a)^T = \mathbb{T}^T x_a^*, \quad (l_b, m_b, n_b)^T = \mathbb{T}^T x_b^* \quad (21)$$

を用いて, 次のように表わせる。

$$(t_y^*)_a = -n_a/l_a, \quad (t_z^*)_a = m_a/l_a, \quad (t_y^*)_b = -n_b/l_b, \quad (t_z^*)_b = m_b/l_b \quad (22)$$

4. 計算例 式(8)と式(10)の回転行列及び式(9)と式(12)の合成手順を調べたために数値計算を行つた。計算式の精度は合成された回転行列の行列式値と比較した。すなわち, 回転角の3成分が等しい場合について1回の回転角を θ ($-\theta_x = \theta_y = \theta_z$)とし, これを10回続けて回転した場合の合成結果の値を表-1に示す。計算結果から, 有限な回転はベクトル的には扱えないことがわかる。

表-1 回転行列の行列式値

| | $\theta = 1.0^\circ (0.01745 \text{ rad})$ | | $\theta = 1.5^\circ (0.02618 \text{ rad})$ | |
|----------|--|----------|--|----------|
| | Eq. (9) | Eq. (10) | Eq. (8) | Eq. (10) |
| Eq. (9) | 1.0 | 1.0092 | 1.0 | 1.0208 |
| Eq. (12) | — | 1.0914 | — | 1.2056 |

5. あとがき 變形後の座標変換行列, 式(19)と部材端のたわみ角, 式(22)の精度については本報告では調べない。これらの式を立体骨組構造物に適用した結果については, 文献⁽⁴⁾を参照されたい。

- 1) S.S. Tezcan & B.C. Mahapatra: Tangent Stiffness Matrix for Space Frame Members, ASCE, Vol.95, ST 6, June 1969.
- 2) 結城・前田: 薄肉断面構造の三次元挙動の解析, 土木学会論文報告集, No. 224, 1974.
- 3) C. Oran: Tangent Stiffness in Space Frames, ASCE, Vol.99, ST 6, June 1973.
- 4) 前田・林: 立体骨組構造物の大變形解析, JSSC第9回マトリクス構造解析法研究発表論文集, 1975.