

電力中央研究所 正員 塩尻弘雄  
電力中央研究所 正員 ○中村秀治

1. まがき アーテダム、フィルダム、原子力発電所諸施設、海洋構造物、長大橋梁などの工本構造物の耐震性、耐風性を検討する上で動的応答を計算することは重要である。動的応答解析法は主として、I)与えられた波形の外力と初期条件に対して運動方程式を逐次積分していく方法、II)外力のうねりに構造物の応答を統計量を取扱う方法、III)応答スペクトル曲線を用いる方法などに分かれる。ここには、I)の立場に立ち、線型系の解析解を利用して漸化式を誘導し、その係数マトリクスを検討して、解の安定性、精度を考察する。さらに、片持ちはりについて動的応答計算を行ない、従来広く用いられてきた *Clough* の線型加速度法、*Wilson* の  $\theta$  法などと比較し、本解析法の有効性を確かめる。

2. 漸化式の誘導 差分法、有限要素法、重みつき残差法など、どのような方法を用いる場合にも、動的応答解析は次式で表わされる運動方程式を逐次積分することに帰着する。

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t) \quad (\text{但し、} M, C, K \text{ は質量、減衰、剛性マトリクス、} U, P \text{ は変位、外力ベクトル)} \dots\dots (1)$$

$M, C, K$  は線型系の場合定数マトリクスであり、非線型系の場合にも微小時間内では定数マトリクスとみなせるので、以下、 $M$  のように扱うことにする。 $M^{-1}$  が存在するものとすれば、式(1)は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ U \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{但し、} I \text{ は単位マトリクス)} \dots\dots (2)$$

$$\text{ここを、} \dot{y} = Ay + Q, \quad A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} M^{-1}P \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots (3)$$

と定めれば、式(2)は

$$\dot{y} = Ay + Q \dots\dots (4)$$

となり、式(4)の初期値問題の一般解は次のように表わされる。

$$y = e^{At}y_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} Q(s) ds \quad (\text{但し、} y_0 \text{ は } t=0 \text{ における } y \text{ の初期値ベクトル)} \dots\dots (5)$$

ここを、 $P(t)$  が  $t$  間で直線変化すると仮定すれば、次式で表わされる漸化式が導かれる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_{t+\Delta t} \\ U_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_t \\ U_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{t+\Delta t} \\ P_t \end{Bmatrix} \dots\dots (6)$$

$U_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{U}_{t+\Delta t}$  および  $U_t$ ,  $\dot{U}_t$  は、時間  $t+\Delta t$  および  $t$  における速度、変位であり、 $P_{t+\Delta t}$ ,  $P_t$  は時間  $t+\Delta t$  および  $t$  における外力である。係数マトリクスについては、

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = e^{A\Delta t} \dots\dots (7)$$

$$\text{であり、} B^0 = \begin{bmatrix} B_{11}^0 & B_{12}^0 \\ B_{21}^0 & B_{22}^0 \end{bmatrix} = A^{-1} (e^{A\Delta t} - I) \dots\dots (8)$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} B_{11}^1 & B_{12}^1 \\ B_{21}^1 & B_{22}^1 \end{bmatrix} = A^{-1} \left\{ \Delta t e^{A\Delta t} - A^{-1} (e^{A\Delta t} - I) \right\} \dots\dots (9)$$

と置けば

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-s)} \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta t} I & \frac{\Delta t-s}{\Delta t} I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^0 - \frac{1}{\Delta t} B_{11}^1 & \frac{1}{\Delta t} B_{11}^1 \\ B_{21}^0 - \frac{1}{\Delta t} B_{21}^1 & \frac{1}{\Delta t} B_{21}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots (10)$$

3. 漸化式の係数マトリクスの近似法 式(7),(8),(9)に示したように、係数マトリクスを求める上で重要なのは  $e^{A\Delta t}$  の計算方法のみである。最も簡単で一般的なのは、次に示す *Maclaurin* 級数による近似であるが、

$$e^{A\Delta t} = I + A\Delta t + \frac{1}{2!} A^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3!} A^3 \Delta t^3 + \dots\dots (11)$$

$\Delta t$ が大きくなると、極めて収束性が悪くなる。その対策の一つとして、 $\Delta t$ を2のべき乗で分割し、 $\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{2^n}$ に対する  $e^{\Delta t_0}$  を求め、 $n$ 回のマトリクス乗算で  $e^{n\Delta t_0}$  を求めることは有効である。なお、こうに式(12)

$$e^{n\Delta t_0} = \left[ e^{A \frac{\Delta t_0}{2}} \right]^{-1} e^{A \frac{\Delta t_0}{2}} = \left[ \mathbb{I} - A \frac{\Delta t_0}{2} + A^2 \left( \frac{\Delta t_0}{2} \right)^2 - A^3 \left( \frac{\Delta t_0}{2} \right)^3 + \dots \right]^{-1} \left[ \mathbb{I} + A \frac{\Delta t_0}{2} + A^2 \left( \frac{\Delta t_0}{2} \right)^2 + A^3 \left( \frac{\Delta t_0}{2} \right)^3 + \dots \right] \dots (12)$$

による有理式近似では、級数を4次以下で打ち切れば、Hurwitzの条件を完全に満たすことが確かめられており、無条件に安定な解が得られ、実用上特に有益である。図-1はこの

ような近似による周期の伸びを無減衰の場合に数値計算して検討したものである(詳しくは、塩尻・中村：構造解析における動的応答解析の一方法について、土木学会論文報告集投稿中)。動的応答計算する際、式(12)の級数を4次までとれば、対象とする構造物の考慮すべき振動モードのうち最も大きな固有角振動数と  $\omega$  とし、 $\omega \Delta t_0 \leq 4$  の範囲の  $\Delta t_0$  で精度良く計算できることになる。

なお、 $e^{n\Delta t_0}$  の近似方法については、式(11)(12)以外にも最小2乗多項式近似、連分式近似など他の多くの方法が考えられる。

4. 数値計算例 図-2に示す片持ちはりについて動的応答計算を行い、本解析法とCloughの線型加速度法、Wilsonの $\theta$ 法( $\theta=1.5$ )との比較を行

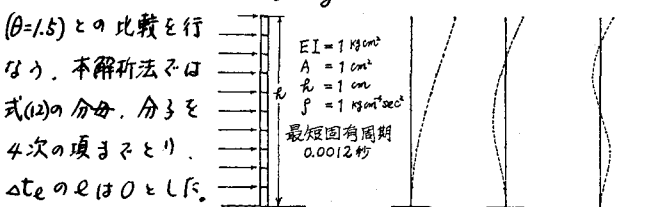


図-2. 計算に用いる片持ちばり  
EI=1 kg/cm<sup>2</sup>  
A=1 cm<sup>2</sup>  
r=1 cm  
rho=1 kg/cm<sup>3</sup>  
最短固有周期  
0.0012秒

図-3は外力が、 $\cos(1.172t)$  kg/cm、時間きざみ0.1秒の場合の自由端の水平方向変位を示したものである。図-4は外力が  $\cos(0.35t)$  kg/cm、時間きざみ0.6秒の場合の自由端の水平方向変位を示したものである。

Cloughの方法では、はりの最短固有周期0.0012秒の0.55倍すなわち0.00066秒以上の時間きざみでは発散し、 $\theta$ 法は、厳密解と比べ、顕著な周期の伸びと振幅の相違がみられる。本解析法の場合、いずれも厳密解と良好な一致を示している。

5. 結 び 以上のように、解析的考察にもとづく運動方程式の数値解法について述べた。漸化式の誘導方法、係数マトリクスの近似法など、いずれも解析的に明快である。この方法がより一般的な常微分方程式の初期値問題の解法に拡張することは明らかである。

参考文献 1) Clough, R.W.: Numerical Integration of the Equations of Motion, lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, The University of Alabama in Huntsville, 1973. 2) Wilson, E.L., Farhoomand, I and Bulke, K.J.: Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.2, No.2, 1973 3) 塩尻, Y.K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1967 4) 滝沢春男: 構造物の振動解析II, 東京大学建築学科修士論文 5) 一松 信: 近似式, 竹内書店, 1963

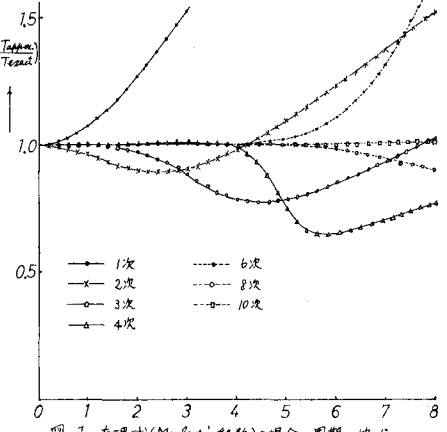


図-1. 有理式(Maclaurin級数)の場合の周期の伸び

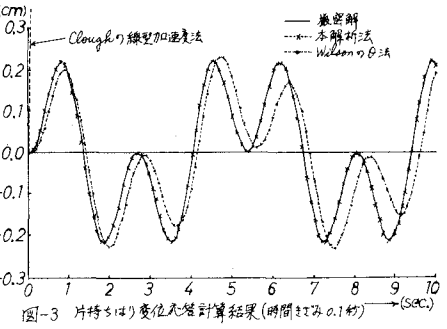


図-3 片持ちばり変位応答計算結果(時間きざみ0.1秒)

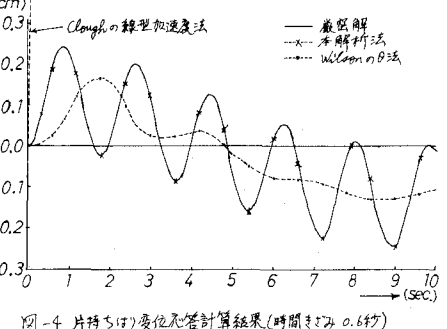


図-4 片持ちばり変位応答計算結果(時間きざみ0.6秒)