I-17　コンプリメンタリー変分原理について

川崎重工業(株)鉄構事業部　正員　坂井藤一

1. まえがき

従来からコンプリメンタリー変分原理の重要性はいろいろな場合に指摘されている。変分原理の歴史上この相反性が初めて登場したのは、Laplace方程式におけるDirichlet原理とKelvin原理であると言われている。固有値問題においてもまたRitz原理とTrefftz(Temple)原理の関係が良く知られている。この相反関係を一般的に述べるには、Friedrichs変換あるいは正準変換によるのが普通である。鷲津[1]は前者に基づいて弾性論における変分原理を一般的に展開し、Noble[2]は後者に基づき力学・ネットワーク・輸送理論など広範囲の問題を組織的に扱い得ることを述べている。また、線形境界値問題に限れば、Prager・Syngeによるhypercircle法[3]やOden[4]による共役射影法に基づくアプローチも可能である。

一方、少し別の観点からこのような変分原理を統一的に論ずることができる。筆者はこの点について先に若干の報告[5]を行なったが、それは最小二乗法あるいはより広い意味で停留二乗原理[6]に基礎を置く考え方である。これは線形境界値問題の場合にはhypercircle法を通じて慣用変分原理に帰せられる。また、初期値問題や初期値—境界値問題の場合には、Hamilton原理およびそれに相補なToupin原理の一般化に相当し、両原理の難点を克服している。その際境界値問題と初期値問題の対比が明瞭になされる。また、この考え方は線形問題のみならず、ある種の非線形問題にも適用され得る。たとえば、有限変位弾性論においても同様の考え方が成り立つことを示すことができる。

ここでは以上のような点を少し具体的に説明する(詳細は文献5)参照)。

2. 線形境界値問題における相反変分原理(微小変位弾性論における鷲津の図式の拡張)

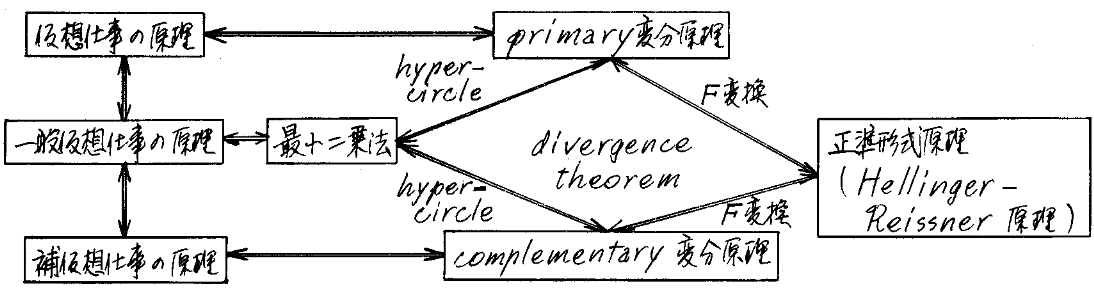

図-1　線形境界値問題における変分原理の一般化

3. 波動方程式における相反変分原理

次の波動方程式を考えよう。　$\rho \ddot{w} + EI w^{IV} = \bar{f}$　in $(0, l)$

初期条件　$w(t_0) = \alpha(x)$,　$\dot{w}(t_0) = \beta(x)$

境界条件　$w = \bar{w}$,　$w' = \bar{w}'$　on B_u;　$Q = \bar{Q}$,　$M = \bar{M}$　on B_σ

次の変換を行なう。　$p = \rho \dot{w}$,　$\dot{q} = -EI w''$

その時原問題は次のようになる。　$\dot{p} - \dot{q}'' = \bar{f}$,　$p(t_0) = \rho \beta(x)$

次の汎関数を考える。　$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\frac{1}{\rho}(\rho \dot{w}^* - p^{**})^2 - \frac{1}{EI}(EI w^{*''} + \dot{q}^{**})^2 \right] dx\,dt$$

$$
=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\int_0^{\ell}\Big[\frac{\rho}{2}\dot{w}^{*2}-\Big(\frac{EI}{2}w^{*\prime\prime 2}-\bar{f}\,w^{*}\Big)\Big]dx+\big(\bar{Q}\,w^{*}-\bar{M}\,w^{*\prime}\big)\Big|_{B_\sigma}\Big]dt
$$

$$
-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\int_0^{\ell}\Big[\frac{1}{2EI}\dot{q}^{**2}-\frac{1}{2\rho}\big(q^{**\prime\prime}+\bar{F}\big)^2\Big]dx+\big(\dot{q}^{**}\,\bar{w}'-\dot{q}^{**\prime}\,\bar{w}\big)\Big|_{B_u}\Big]dt
$$

$$
-\int_0^{\ell}w^{*}\big(q^{**\prime\prime}+\bar{F}\big)dx\Big|_{t_0}^{t_1}
$$

ここで、w^*は幾何学的許容量、p^{**}・q^{**}は力学的許容量とし、$\bar{F}=\int_{t_0}^{t}\bar{f}\,dt$ である。この第一項は、Hamilton原理の汎関数、第二項はToupin原理の汎関数であり、両者はそれぞれ相補な関係にある。第三項は$t=t_1$なる境界における両者のcouplingを示すもので、両原理において見過されて来た項である。この項の存在が$t=t_1$の条件を含めて変分原理を完全なものにし、かつ初期値問題の特性ともなっている。この汎関数による変分原理を一応停留二乗原理と呼ぶが、上記両原理の一般化に相当する。

4. 有限変位弾性論における相反変分原理

次の汎関数を考えよう。 $J=\frac{1}{2}\int_V\big([A^{1/2}]\{e^*\}-[A^{-1/2}]\{\sigma^{**}\}\big)^2 dV$

ここで、$\{e^*\}$は幾何学的許容変位から求まるひずみ、$\{\sigma^{**}\}$は力学的許容応力とする。$[A]$はHooke則を示すばねマトリクスである。上式は書替えると、

$$
J\big(e^*(u^*),\,\sigma^{**}\big)=\pi_p\big(e^*(u^*)\big)-\pi_c\big(\sigma^{**},\,u^*(\sigma^{**})\big)
$$

ただし、π_p および π_c はそれぞれ全ポテンシャルエネルギー，全コンプリメンタリーエネルギーである。

$$
\pi_p\big(e^*(u^*)\big)\equiv\int_V\Big[\frac{1}{2}\{e^*\}^T[A]\{e^*\}-\bar{F}_k u_k^*\Big]dV-\int_{S_\sigma}\bar{T}_k u_k^*\,ds
$$

$$
\pi_c\big(\sigma^{**},\,u^*(\sigma^{**})\big)\equiv-\int_V\Big[\frac{1}{2}\{\sigma^{**}\}^T[A^{-1}]\{\sigma^{**}\}dV+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{**}u_{k,i}^{*}u_{k,j}^{*}\Big]dV
$$

$$
+\int_{S_u}T_k^{**}\bar{u}_k\,ds
$$

すなわち、両式は鷲津の与えた形式と一致する。非線形境界値問題においても同様の考え方が成立つこと、および境界値問題の特性が良く表われている。この場合線形問題のように常に上下界定理が成立するとは限らない。

参考文献

1) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968

2) Noble, B.: Complementary Variational Principles for Boundary-value Problems, Math. Research Center, University of wisconsin, 1964

3) Synge, J.: The Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1957

4) Oden, J. T. and Reddy, J. N.: Convergence of Mixed Finite-element Approximations of a Class of Linear Boundary-value Problems, J. Struct. Mech. 2(2), 1973

5) 坂井藤一：力学における変分原理の一般化について，日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，1975

6) 坂井藤一：最小二乗変分原理に基づく有限要素法（その2），第29回土木年次学術講演，1974