

大阪市立大学 正員 倉田 宗章  
 明石工業高専 正員 〇 高 端 宏 直  
 近畿大学 正員 谷 平 勉

1). まえがき……著者らは平板の曲げ問題を差分法を用いて近似数値解析を行ってきた。<sup>(1)~(4)</sup>これらは厳密解がみあたらなかったため類似例より精度の検討をした。今回は初歩的な問題を含め数値実験的に連続解と比較した。これらの曲げ解析には計算式も簡単で、境界条件の処理も比較的容易な一般の中央差分を採用した。差分法による誤差は打ち切り誤差あるいは離散化誤差と計算誤差に大別されるが、荷重状態や境界条件によって、粘弾性の初期値問題では時間きざみゆいによって影響をうける。次に二三の計算例をあはる。

2). 計算例と考察

(a). その1……初歩的な単純はり並びに平板(単純または固定支承)に集中荷重 $P$ または等分布荷重 $q$ が作用した場合をあはる。中央差分法による打ち切り誤差は分格長 $h$ の自乗の関数 $O(h^2)$ となり、 $h \rightarrow 0$ の値を $h^2$ の1次外挿法で推定値を求めた<sup>5)</sup>。はりまたは板の式を差分表示すれば次式のようなになる。

$$[K] \cdot \{w\} = \{q\} \quad \text{----- (1)}$$

この $[K]$ は差分表示による係数マトリックス、 $\{w\}$ 、 $\{q\}$  (a) 単純支持

はたわみや荷重ベクトルである。著者らが扱ったはね基礎上の場合は上記の $[K]$ に $[k]$ (バネの影響)を加える。この種の問題では $[k]$ の精度に対する影響は小さいものと考え本文では $[k]$ を省略した。図-1ははりの中点のたわみ $W_0$ (添字0は中点または中央点を示す)と分割数 $N$ の $(1/N)^2$ との関係を示した。いかれもほぼ直線上にのり推定値と厳密解はよく一致している。図-2(a)は単純支持板で、 $P$ および $q$ による $W_0$ と、 $q$ による曲げモーメント $M_{x0}$ と $(1/N)^2$ との関係を示した。 $\Delta$ 印は載荷点下の格子上的 $P$ の荷重分配を若干操作した場合である<sup>6)</sup>。図(b)は周辺固定の場合である。いかれもほぼ直線上にのり、推定値は荷重状態と境界条件によって精度が異なる。境界条件については共役射影理論を用いた処理法が提案されている<sup>7)</sup>。もによる $W_0$ はより精度を示している。

(b). その2……図-3に示すようなKelvin-Modelの独立バネ基礎におかれた無限長のはりに $K$ が等間隔に作用した場合のたわみ $w$ と地盤反力 $p$ を求めた。初期値問題を含んだ曲げ解析である。Freudenthal<sup>8)</sup>によって求められた解を参照して次の級数解をうる。(計算結果は図-5に示す。)

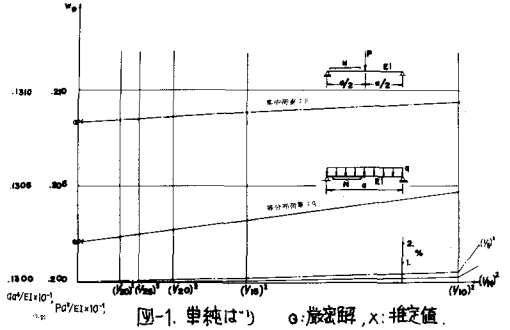


図-1. 単純はり ○: 厳密解, x: 推定値.

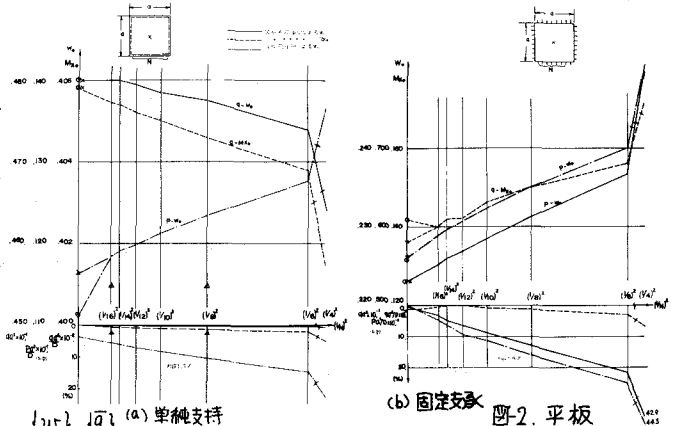


図-2. 平板

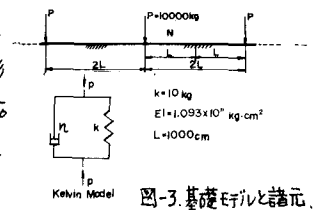


図-3. 基礎モデルと諸元.

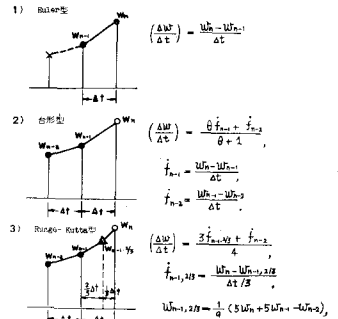


図-4. 時間方向のこう配.

$$w = \frac{P}{2Lk} (1 - e^{-\lambda x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P}{Lk} \cdot \frac{1}{M} \cos \frac{m\pi x}{L} (1 - e^{-M \cdot t/\tau})$$

$$p = \frac{P}{2L} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{M} \cdot \frac{P}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot M \cdot e^{-M \cdot t/\tau} \quad (2)$$

$$M = 1 + \left(\frac{m\pi \lambda}{L}\right)^2, \lambda^4 = \frac{EI}{k}, \tau = \frac{\eta}{k}$$

ここで  $\eta$  は板の粘性係数,  $k$  は板定数である。微分方程式  $EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ky = \bar{q}$  を差分表示すれば次式を得る。

[Euler型] (w) 
$$([K] + (1 + 1/\tau)[\delta])\{w_n\} = \{\bar{q}\}, \{P_n/k\} = \{w_n\}(1 + \frac{1}{\tau}) - \frac{1}{\tau}\{w_{n-1}\},$$

[台形型,  $\theta=9$ ] 
$$([K] + (1 + 0.9/\tau)[\delta])\{w_n\} = \{\bar{q}\} \quad \{P_n/k\} = \{w_n\}(1 + \frac{0.9}{\tau}) - \frac{0.8}{\tau}\{w_{n-1}\} - \frac{0.1}{\tau}\{w_{n-2}\},$$

[R.K型] 
$$([K] + (1 + 1.25/\tau)[\delta])\{w_n\} = \{\bar{q}\} \quad \{P_n/k\} = \{w_n\}(1 + \frac{1.25}{\tau}) - \frac{1.5}{\tau}\{w_{n-1}\} + \frac{0.25}{\tau}\{w_{n-2}\}$$

$\delta = \frac{\Delta x^2}{2EI} = \frac{k}{EI} \Delta x^2, \tau = \Delta t/\tau, \bar{q} = \frac{P\lambda}{k} \cdot \delta^{3/4} \quad (3)$

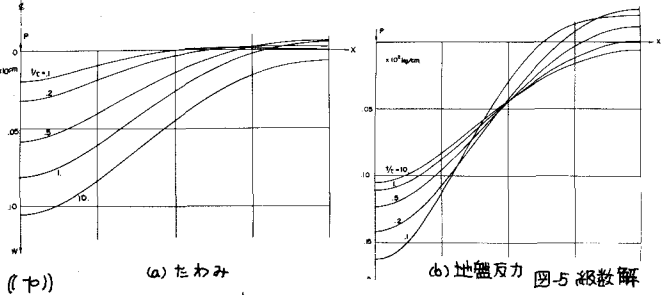


図-6. たわみと地盤反力の相対誤差

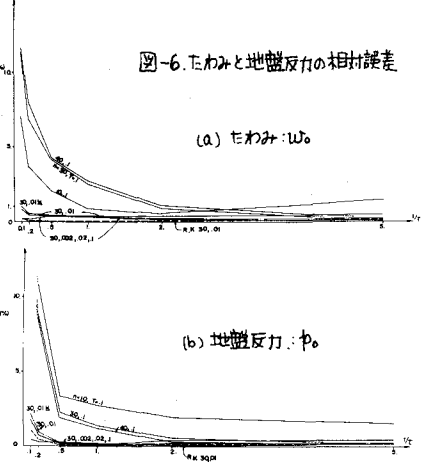


図-8. たわみ  $w_0$  と地盤反力  $p_0$  の一般化的傾向

時間方向の差分は図-4に示すEuler型, 台形型, R.K (Runge-Kutta)型の3つを用いた。R.K型の  $w_{n-1}, w_{n-2}$  はNewtonの内挿法より求めた。初期値は  $\{w\}_{t=0} = \{0\}$  で,  $p$  は  $w$  より直接的に求める。図-6は  $w$  と  $p$  の相対誤差と無次元化した時間  $t/\tau$  との関係を示す。

$n$  は元数で分割数  $N$  は  $N = n-1$  となり,  $\tau$  は無次元化した時間のさきみ巾である。図中  $n=30, \tau=0.002, 0.02, 0.1$  はEuler法で途中でさきみ巾を変化させた場合である。図-7は

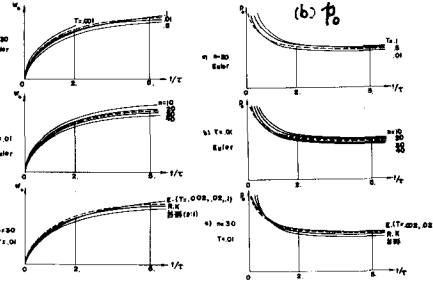


図-7. Euler法の精度の検討

Euler法の  $n$  と  $\tau$  による精度の影響を調べた。A, B, Cは時間的に初期, 中周期, 収束期を示し, 各求点の上段は  $w$  下段は  $p$  を示し,  $\bigcirc$ 印は精度がよい区間を意味する。図-8は  $w_0, p_0$  (動荷点下の諸量) の一般的傾向を描いた図である。考察として 1)  $n$  と  $\tau$  が相互に関係する。2) Euler法では  $n=30, \tau=0.01$  がよく,  $\tau$  を変化するのも有効である。R.K法は全体的により精度を示す。3) 本方法では収束性, 安定性には問題はなかつた。等がいえる。

3) むすび……以上数値実験的に考察したが, 種々の条件により特徴を表わす個々のケースで検討する必要がある [参考文献] そのと考えられる。

- 1) 倉田, 高橋, 谷平: 非線形バネ基礎上の周辺自由な平板の数値解析, 土木学会論文報告集, 第208号, 1972.
- 2) 倉田, 高橋, 谷平: 粘弾性バネ基礎上の平板の数値解析, 土木学会年次学術講演会概要, I-146, 1973.
- 3) 倉田, 高橋, 谷平: パステルナク型基礎上の平板の一数值解析について, 土木学会年次学術講演会概要, I-69, 1974.
- 4) 倉田, 高橋, 谷平: 半無限弾性体上の周辺自由な平板の数値解析, 土木学会論文報告集(投稿中)
- 5) 赤坂: 数値計算法, 応用力学講座 第7巻, JONA社, 昭46, p. 393.
- 6) 上田: 差分法による平板の近似解析, 橋梁, 1968-3.
- 7) 佐武, 新奥: 共役射影理論を応用した板の差分式, 土木学会年次学術講演会概要, I-72, 1974.
- 8) A.M. Freudenthal, H.G. Lorsch: The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation, Proc. of A.S.C.E. EM. 1, Jan, 1957.
- 9) 戸川: 微分方程式の数値計算-有限要素法と差分法-, オーム社, 昭48.