

関西大学工学部 正会員 〇三 上 市 蔵  
 関西大学工学部 正会員 米 沢 博

まえがき 差分法は古くから有力な構造解析法として用いられてきた。有限要素法の歴史は差分法より新しいが、最近の発達は目覚ましい。この2つの近似解法では、一般に分割を細くすると解は正解に近づく。これは細分割とともに離散化誤差が縮小するためであるが、実際上望ましい精度の解を得られない場合が多い。一つはコンピュータの記憶容量によって取扱い可能な未知量数が制限されるため、細分化が不十分な場合である。他の場合としてコンピュータの中で取扱う数値の桁数に関係する丸めの誤差のため、細分化に限界が生ずることもある。このような場合に種々の分割に対する解を用いて真の解を推定する外挿式が有効になる。

Richardsonの外挿式 L.F. Richardson<sup>1)</sup>は線形微分方程式と線形境界条件によって定まる問題の差分解の誤差が、差分間隔を $h$ とすると $h^2$ 形もしくは $h^4$ 形になることを示し、高精度の近似解を推定するための外挿式<sup>2)</sup>を導いている。M.G. Salvadori<sup>3)</sup>は柱・はり・矩形板・斜板・三角形板・円筒シェルの座屈を例にとりこの外挿式が固有値問題の差分解にも適用できることを示した。この結果は成岡<sup>7)</sup>、M. Soare<sup>4)</sup>によって引用されており、J.A. Mueller<sup>5)</sup>はプレート・ガーダ・腹板の応力解析において差分解を改良するために外挿式を実用している。

この外挿式は1変数関数のためのものであるが、2変数関数の場合にも2変数に対する分割の比が一定のときに限り適用できる。上記 Salvadoriの板とシェルの例題<sup>3)</sup>では2方向の分割数が等しい場合に外挿式が適用されている。

また、有限要素解に対する外挿式の適用はH. Ramstad<sup>6)</sup>によってなされ、板の曲げ解析において高精度解の推定に成功している。ただし、2方向に等分割された場合に限定されている。

1変数の外挿式 Richardsonの外挿式を別の観点から考え直してみよう。いま差分解 $f$ が分割数 $n$ の増加とともに単調に真の解 $f_{ex}$ に収束する場合を考える。この関数はつぎのように表わされる。

$$f = f_{ex} + C_1 N + C_2 N^2 + C_3 N^3 + \dots \quad (1)$$

ただし、 $N = 1/n$ で、 $C_1, C_2, \dots$ は定数である(図-1)。

$n_i$ 分割による解を $f_i$ とすると式(1)より

$$f_i = f_{ex} + C_1 N_i + C_2 N_i^2 + C_3 N_i^3 + \dots \quad (2)$$

となるので、 $k$ 個の相異なる $n_i$ に対する解が得られている場合には式(2)において $C_k, C_{k+1}, \dots$ の項を無視して、 $i = 1, 2, \dots, k$ に適用するとつぎの $k$ 元連立一次方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & N_1 & N_1^2 & \dots & N_1^{k-1} \\ 1 & N_2 & N_2^2 & \dots & N_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N_k & N_k^2 & \dots & N_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{ex} \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \quad (3)$$

G. Cramerの公式を用いて式(3)を解くと、真の解 $f_{ex}$ の推定値がつぎのように得られる。

$$f_{ex} = D_1 / D \quad (4)$$

ただし、 $D$ は式(3)の左辺の係数を要素とする行列式、 $D_1$ は $D$ の第1

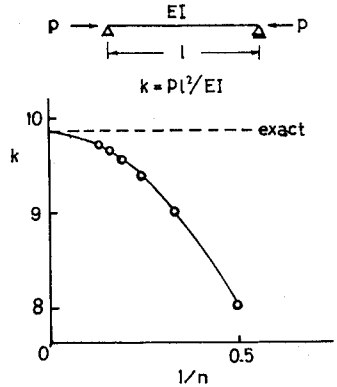


図-1

- 1) Richardson, L.F., *Philos. Trans. Royal Soc. London, Ser. A*, 210(1910), 307-357.
- 2) Salvadori, M.G., and Baron, M.L., *Numerical Methods in Engineering*, 2nd ed., Prentice-Hall (1961), 96-101.
- 3) Salvadori, M.G., *Trans. ASCE*, 116(1951), 590-636.
- 4) Soare, M., *Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis*, Pergamon Press (1967), 71-73.
- 5) Mueller, J.A., *Girder Web Boundary Stresses and Fatigue*, Dissertation, Lehigh Univ. (1967).
- 6) Ramstad, H., *Finite Element Methods in Stress Analysis*, ed. by I. Holand & K. Bell, TAPIR, Norway (1969), 179-211.
- 7) 成岡：構造力学要論，丸善(1974)，204-207.
- 8) Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill (1970).

列の要素を式(1)の右辺の要素で置換えたものである。

$k=2$  とおき関数  $f = f_{ex} + C_1 N$  に対する外挿式を式(4)から導くとつぎのようになる。

$$f_{ex} = (N_2 f_1 - N_1 f_2) / (N_2 - N_1) \quad (5)$$

ここで  $N = 1/n^2$  とおくと Richardson<sup>1)</sup> の  $h^2$  型外挿式が得られ、 $N = 1/n^4$  とおくと  $h^4$  型外挿式が得られる。その他任意の外挿式を導くことができる。Richardson<sup>1)</sup> や Salvadori<sup>3)</sup> は誤差が  $h^{2m}$  型であることを議論して外挿式の妥当性を確かめているが、式(4)による外挿式はそれには拘泥しない。単純に収束しさえすればよく、項数を多く採れば精度が良く、また有効な項のみを採用すれば少数項で高精度の外挿式ができる。

**2変数の外挿式** 独立変数  $x, y$  方向の分割数をそれぞれ  $n_i, m_i$  とする。任意の  $m$  (または  $n$ ) に対して解が  $n$  (または  $m$ ) の増加とともに単純に収束する場合、関数はつぎのように近似できる。

$$f_i = f_{ex} + C_1 N_i + C_2 M_i + C_3 N_i^2 + C_4 N_i M_i + C_5 M_i^2 + \dots \quad (6)$$

ただし、 $N_i = 1/n_i, M_i = 1/m_i$  である。右辺を第  $k$  項までで打ち切り、式(3)と同様な連立一次方程式を求め、解くと式(4)と同様に  $f_{ex}$  の推定式が得られる。

(1)  $x, y$  方向の分割数の比  $\alpha = n_i/m_i$  が一定の場合には  $M_i = \alpha N_i$  を式(6)に代入すると

$$f_i = f_{ex} + C_1' N_i + C_3' N_i^2 + \dots \quad (7)$$

となるので、1変数の外挿式を用いることができる。

(2) 3種の分割に対する解  $f_1, f_2, f_3$  がある場合、関数  $f_i = f_{ex} + C_1 N_i + C_2 M_i$  に対して外挿式は

$$f_{ex} = \frac{(N_2 M_3 - N_3 M_2) f_1 + (N_3 M_1 - N_1 M_3) f_2 + (N_1 M_2 - N_2 M_1) f_3}{(N_2 M_3 - N_3 M_2) + (N_3 M_1 - N_1 M_3) + (N_1 M_2 - N_2 M_1)} \quad (8)$$

$N_i = 1/n_i^2, M_i = 1/m_i^2$  とおくと  $h^2$  型外挿式になる。

(3)  $n_1, n_2$  と  $m_1, m_2$  の組合せでできる4種の分割に対しては、 $n_i, m_i$  による解を  $f_{ij}$  と表わし、関数として  $f_{ij} = f_{ex} + C_1 N_i + C_2 M_j + C_3 N_i M_j$  を選ぶとつぎの外挿式が得られる。

$$f_{ex} = \frac{N_2 M_2 f_{11} - N_2 M_1 f_{12} - N_1 M_2 f_{21} + N_1 M_1 f_{22}}{(N_1 - N_2)(M_1 - M_2)} \quad (9)$$

**数値計算例** 有限要素解への適用の一例を示す。図-2に示すような分割で一樣引張応力を受ける有孔長方形板を解き、点Pの  $\sigma_y$  について R.C.J. Howland の解<sup>8)</sup> と有限要素解(黒塗部要素)を比較した。

有限要素解(黒塗部要素)を比較した。

Mesh	$n_\theta$	$n_r$	F.E. Solutions	
			$\sigma_y/\sigma_m$	% Error
6-3	6	3	4.006	-7.8
6-4	6	4	4.084	-5.0
12-4	12	4	4.075	-5.2
Exact			4.300	--
Combination of meshes			Extrapolated	
			$\sigma_y/\sigma_m$	% Error
6-3/6-4			4.18	-2.8
6-3/12-4			4.10	-4.7
6-3/6-4/12-4			4.28	-0.5

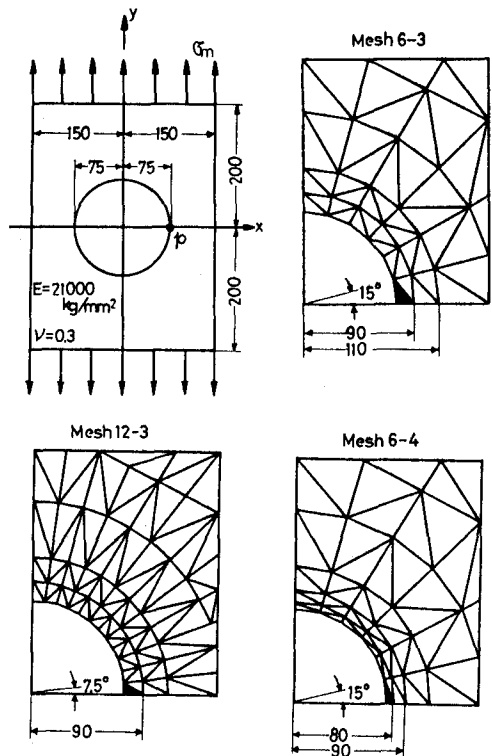


図-2