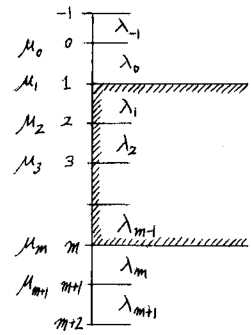
I-13　不等間隔の差分式を用いた平板の解

法政大学　正員　大地羊三

1. 不等間隔の差分式



$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy=\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&1&\\&&\ddots&\ddots\\&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{-1}&&&\\&\lambda_0&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_{m+1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&1&\\&&\ddots&\ddots\\&&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{-1}}+\frac{1}{\lambda_0}\right)&\frac{1}{\lambda_0}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_m}&-\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)&\frac{1}{\lambda_{m+1}}\end{bmatrix}$$

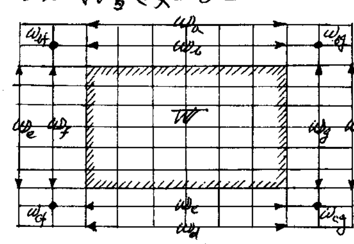
$$\frac{\partial^3}{\partial y^3}=\begin{bmatrix}\lambda_0&&\\&\ddots&\\&&\lambda_m\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&1&\\&&\ddots&\ddots\\&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_0&&\\&\ddots&\\&&\mu_{m+1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{-1}}+\frac{1}{\lambda_0}\right)&\frac{1}{\lambda_0}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_m}&-\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)&\frac{1}{\lambda_{m+1}}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4}dy=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0}&-\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}\right)&\frac{1}{\lambda_1}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_{m-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{m-1}}+\frac{1}{\lambda_m}\right)&\frac{1}{\lambda_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_0&&\\&\ddots&\\&&\mu_{m+1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{-1}}+\frac{1}{\lambda_0}\right)&\frac{1}{\lambda_0}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_m}&-\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)&\frac{1}{\lambda_{m+1}}\end{bmatrix}$$

はりの場合との相似から $\mu_0 \cdots \mu_{m+1}$ を含む行列は三連行列にした方が精度が良いと思われる。

2. 解式の差分による表現

スラブの微分方程式 $B_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+(4C+\nu_x B_y+\nu_y B_x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+B_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=p$ を差分式で書き変えると



$$B_x\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_m\end{bmatrix}\left[w_e\;w_f\;W\;w_g\;w_h\right]\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{-1}}&&\\-\left(\frac{1}{\lambda_{-1}}+\frac{1}{\lambda_0}\right)&\ddots&\frac{1}{\lambda_n}\\\frac{1}{\lambda_0}&\ddots&-\left(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\\&&\frac{1}{\lambda_{n+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_0&&\\&\ddots&\\&&\mu_{m+1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0}&&\\-\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}\right)&\ddots&\frac{1}{\lambda_{n-1}}\\\frac{1}{\lambda_1}&\ddots&-\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}}+\frac{1}{\lambda_n}\right)\\&&\frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

$$+(4C+\nu_x B_y+\nu_y B_x)\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0}&-\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}\right)&\frac{1}{\lambda_1}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_{m-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{m-1}}+\frac{1}{\lambda_m}\right)&\frac{1}{\lambda_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{bf}&w_b&w_{bg}\\w_f&W&w_g\\w_{cf}&w_c&w_{cg}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0}&&\\-\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}\right)&\ddots&\frac{1}{\lambda_{n-1}}\\\frac{1}{\lambda_1}&\ddots&-\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}}+\frac{1}{\lambda_n}\right)\\&&\frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

$$+B_y\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0}&-\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}\right)&\frac{1}{\lambda_1}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_{m-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{m-1}}+\frac{1}{\lambda_m}\right)&\frac{1}{\lambda_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_0&&\\&\ddots&\\&&\mu_{m+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{-1}}+\frac{1}{\lambda_0}\right)&\frac{1}{\lambda_0}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_m}&-\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)&\frac{1}{\lambda_{m+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_a\\w_b\\W\\w_c\\w_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_m\end{bmatrix}\mathbb{P}\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{bmatrix}\quad\text{--------- (1)}$$

上式は領域外の変位 w_a, w_b, --- 等を含んでいる。これを除くためには、境界条件が必要である。全辺自由の境界条件は

$$\mathbb{M}_x\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=0\qquad\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\mathbb{M}_y=0\qquad\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\mathbb{M}_{xy}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=0\qquad\mathbb{R}_x\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=0\qquad\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\mathbb{R}_y=0\quad\text{---- (2)}$$

と書ける。これらに断面力を差分で書いた式

$$\mathbb{M}_x=-B_x\left[w_f\;W\;w_g\right]\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0}&&\\-\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}\right)&\ddots&\frac{1}{\lambda_{n-1}}\\\frac{1}{\lambda_1}&\ddots&-\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}}+\frac{1}{\lambda_n}\right)\\&&\frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{bmatrix}^{-1}-\nu_x B_y\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_m\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0}&-\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}\right)&\frac{1}{\lambda_1}&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&\frac{1}{\lambda_{m-1}}&-\left(\frac{1}{\lambda_{m-1}}+\frac{1}{\lambda_m}\right)&\frac{1}{\lambda_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_b\\W\\w_c\end{bmatrix}$$

等（M_y, M_{xy}, R_x, R_y についても同様の式ができる）を代入すると

$$[\omega_f\ \omega_g] = -(\mathbb{W}\mathbb{D}_x\mu_x^{-1} + \frac{\nu_x B_y}{B_x}\tilde{\mu}_y^{-1}\mathbb{D}_y\mathbb{W})\mathcal{E}_x(\mathcal{E}_x^T\mu_x^{-1}\mathcal{E}_x)^{-1}\lambda_0 \qquad \begin{bmatrix}\omega_b\\ \omega_c\end{bmatrix} = -\lambda_0(\mathcal{E}_y^T\mu_y^{-1}\mathcal{E}_y)^{-1}\mathcal{E}_y^T\left(\mu_y^{-1}\mathbb{D}_y\mathbb{W} + \frac{\nu_y B_x}{B_y}\mathbb{W}\mathbb{D}_x\tilde{\mu}_x^{-1}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\omega_{bf} & \omega_{bg}\\ \omega_{cf} & \omega_{cg}\end{bmatrix} = -\left\{\mathcal{E}_y^T\mathbb{W}\mathbb{D}_x\mu_x^{-1}\mathcal{E}_x(\mathcal{E}_x^T\mu_x^{-1}\mathcal{E}_x)^{-1}\lambda_0 + \lambda_0(\mathcal{E}_y^T\mu_y\mathcal{E}_y)^{-1}\mathcal{E}_y^T\mu_y^{-1}\mathbb{D}_y\mathbb{W}\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y^T\mathbb{W}\mathcal{E}_x\right\}$$

$$B_x[\omega_e\ \omega_h]\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0\cdots 0 & 0\\ 0 & 0\cdots 0 & \frac{1}{\lambda_{m+1}}\end{bmatrix}\boxed{\mu_x}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & \vdots\\ 0 & 0\\ \vdots & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} =$$

$$-B_x\left\{\mathbb{W}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0} & & 0\\ 0 & \mathbb{D}_x & \vdots\\ \vdots & & 0\\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix} + [\omega_f\ \omega_g]\begin{bmatrix}-(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_0}) & \frac{1}{\lambda_0} & 0\cdots 0\\ 0\cdots 0 & \frac{1}{\lambda_n} & -(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_{m+1}})\end{bmatrix}\right\}\boxed{\mu_x}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & \vdots\\ 0 & 0\\ \vdots & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$-(\nu_x B_y+4c)\mu_y^{-1}\left\{\left(\mathbb{D}_y\mathbb{W}+\mathcal{E}_y\lambda_0^{-1}\begin{bmatrix}\omega_b\\ \omega_c\end{bmatrix}\right)\mathcal{E}_x - \left(\mathbb{D}_y[\omega_f\ \omega_g]+\mathcal{E}_y\lambda_0^{-1}\omega_0\right)\right\}$$

$$B_y\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\cdots 0\\ 0\cdots 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\boxed{\mu_y}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0\\ 0 & \vdots\\ \vdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_{m+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_a\\ \omega_d\end{bmatrix} =$$

$$-B_y\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\cdots 0\\ 0\cdots 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\boxed{\mu_y}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_0} & 0\cdots 0\\ & \mathbb{D}_y\\ 0\cdots 0 & \frac{1}{\lambda_m}\end{bmatrix}\mathbb{W} + \begin{bmatrix}-(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_0}) & 0\\ \frac{1}{\lambda_0} & \vdots\\ 0 & \frac{1}{\lambda_m}\\ \vdots & \\ 0 & -(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_{m+1}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_b\\ \omega_c\end{bmatrix}\right\}$$

$$-(\nu_y B_x+4c)\left\{\mathcal{E}_y^T\left(\mathbb{W}\mathbb{D}_x+[\omega_f\ \omega_g]\lambda_0^{-1}\mathcal{E}_x^T\right) - \left(\begin{bmatrix}\omega_b\\ \omega_c\end{bmatrix}\mathbb{D}_x+\omega_0\lambda_0^{-1}\mathcal{E}_x^T\right)\right\}\mu_x^{-1}$$

が得られる。ただし

$$\mathbb{D}_x = \begin{bmatrix}-(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}) & \frac{1}{\lambda_1} & & \\ \frac{1}{\lambda_1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{\lambda_{n-1}}\\ & & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & -(\frac{1}{\lambda_{n-1}}+\frac{1}{\lambda_n})\end{bmatrix} \quad \mu_x = \begin{bmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{bmatrix} \quad \boxed{\mu_x} = \begin{bmatrix}\mu_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n+1}\end{bmatrix} \quad \mathcal{E}_x = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \lambda_0 = \begin{bmatrix}\lambda_0 & \\ & \lambda_n\end{bmatrix} \quad \omega_0 = \begin{bmatrix}\omega_{bf} & \omega_{bg}\\ \omega_{cf} & \omega_{cg}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mu}_x^{-1} = \mu_x^{-1} - \mu_x^{-1}\mathcal{E}_x(\mathcal{E}_x^T\mu_x^{-1}\mathcal{E}_x)^{-1}\mathcal{E}_x\mu_x^{-1}$$

以上の結果を式(1)に代入して式を整理すると，次の解式が得られる。

$$\boxed{B_x\mathbb{E}_y\mathbb{W}\mathbb{F}_x + \nu_y B_x\mathbb{D}_{y1}\mathbb{W}\mathbb{D}_{x1} + \nu_x B_y\mathbb{D}_{y2}\mathbb{W}\mathbb{D}_{x2} + 4c\,\mathbb{D}_{y3}\mathbb{W}\mathbb{D}_{x3} + B_y\mathbb{F}_y\mathbb{W}\mathbb{E}_x = \mu_y\mathbb{P}\mu_x} \quad \text{--------- (3)}$$

ただし $\mathbb{E}_y = \mu_y - \nu_x\nu_y\mathcal{E}_y(\mathcal{E}_y^T\mu_y^{-1}\mathcal{E}_y)^{-1}\mathcal{E}_y^T$　$\mathbb{F}_y = \mathbb{D}_y\tilde{\mu}_y^{-1}\mathbb{D}_y$　$\mathbb{D}_{y1} = \mathbb{D}_y\tilde{\mu}_y^{-1}\mu_y$　$\mathbb{D}_{y2} = \mu_y\tilde{\mu}_y^{-1}\mathbb{D}_y$　$\mathbb{D}_{y3} = \mathbb{D}_y + \mathcal{E}_y\lambda_0^{-1}\mathcal{E}_y^T$

$\mathbb{E}_x = \mu_x - \nu_x\nu_y\mathcal{E}_x(\mathcal{E}_x^T\mu_x^{-1}\mathcal{E}_y)^{-1}\mathcal{E}_x^T$　$\mathbb{F}_x = \mathbb{D}_x\tilde{\mu}_x^{-1}\mathbb{D}_x$　$\mathbb{D}_{x1} = \mathbb{D}_x\tilde{\mu}_x^{-1}\mu_x$　$\mathbb{D}_{x2} = \mu_x\tilde{\mu}_x^{-1}\mathbb{D}_x$　$\mathbb{D}_{x3} = \mathbb{D}_x + \mathcal{E}_x\lambda_0^{-1}\mathcal{E}_x^T$

式(4)は一種の連立一次方程式であるが，このままでは解きにくい。$\mathbb{W}$と$\mathbb{P}$をベクトルになおし，直積行列の和を係数行列にする次の連立一次方程式に直してから解かなければならない。

$$\left\{B_x\mathbb{E}_y\times\mathbb{F}_x^T + \nu_y B_x\mathbb{D}_{y1}\times\mathbb{D}_{x1}^T + \nu_x B_y\mathbb{D}_{y2}\times\mathbb{D}_{x2}^T + 4c\,\mathbb{D}_{y3}\times\mathbb{D}_{x3}^T + B_y\mathbb{F}_y\times\mathbb{E}_x^T\right\}\{\mathbb{W}\} = \{\mathbb{P}\} \quad \text{----------- (4)}$$

3. 各種支持条件に対する修正

(i) x軸にそう縁が支持の場合：— $\mathbb{F}_x, \mathbb{D}_{x1}, \mathbb{D}_{x2}, \mathbb{D}_{x3}, \mathbb{E}_x$ の1行1列を消す

(ii) x軸にそう縁が固定の場合：— $\mathbb{F}_x, \mathbb{D}_{x1}, \mathbb{D}_{x2}, \mathbb{D}_{x3}, \mathbb{E}_x$ の1行1列を消し，$\mathbb{F}_x$の(2,2)要素に$1/\lambda_0^2\mu_{x1}$を加える。

(iii) x軸に平行なi行に梁がある場合：— $\mathbb{E}_y$の(i, i)要素にEI/B_xを加える。

(iv) y軸にそう縁が支持の場合

(v) y軸にそう縁が固定の場合

(vi) y軸に平行なi列に梁がある場合

{以上の(iv)(v)(vi)は，(i),(ii),(iii)のサフィックスx,yをy,xとよみかえたものになる}

(vii) 点支持の場合：— 全体の剛性マトリックスを作ってから，支点処理をする。