I-12　　構造解析における演算子法の総論およびその特徴

信州大学　正員　○谷本　勉之助
夏目　正太郎
石川　清志

構造解析における演算子法は，筆者らの研究室で始められてから，16年余になる．同法は大別して

(1) 固 有 マ ト リ ク ス 法

(2) 三軸剛性マトリクスによる一般変形法（漸化変形法）

となる．どちらも，骨組系および有限要素法系における静力学釣合系および振動，座屈の系に適用できる．
(1)の固有マトリクス法は，たわみ又は変位による微分方程式の特解群を row-column rule による内積形（一般には2次形式）に書くことから始めて，解析の全過程を，一分のすきもなく，マトリクス代数で組み上げる．こうすると解析の思想と計算とが両方共に大いに楽になる．さらに computer のプログラミングが助かり，小さい computer でも，大きな系が解けることになる．繰返しの系（topological systems）については，常に漸化方式になる．固有マトリクスを $\mathbb{N}$ とすれば，漸化式は一般に

$$\mathbb{N}_r=\mathbb{L}_r\mathbb{N}_{r-1}+\mathbb{K}'_{r-1} \tag{1}$$

の形をとる．ここに $\mathbb{K}'_{r-1}$ は，任意の荷重マトリクス（load-matrix）による荷重項をあらわす．式(1)を漸化的に使って，

$$\mathbb{N}_r=\mathbb{G}_r\mathbb{N}_1+\mathbb{P}_{r-1} \tag{2}$$

をうる．ここに

$$\mathbb{G}_r=\mathbb{L}_r\mathbb{G}_{r-1},\qquad \mathbb{P}_{r-1}=\mathbb{L}_r\mathbb{P}_{r-2}+\mathbb{K}'_{r-2}. \tag{3}$$

$\mathbb{G}_r$ は集積移行子，$\mathbb{P}_{r-1}$ は集積荷重項である．
(2)の漸化変形法では，複雑な三次元の立体骨組を一般変形法に組立てる．そのための key equation は

$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}(0)\\ \mathbb{V}(1)\end{bmatrix}^i=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}(0)\\ \mathbb{U}(1)\end{bmatrix}^i+\begin{bmatrix}\gamma\\ \gamma'\end{bmatrix}\mathbb{K} \tag{4}$$

の形をとる．$\mathbb{V}^i$ は一般力，$\mathbb{U}^i$ は一般変位である．$\mathbb{K}$ は荷重マトリクスで，どんな外部荷重に対しても，これに対応する荷重マトリクスを計算することができる．式(4)は局部座標によるから，これを全体座標に変換するのがよい．こうして，全体座標による key equation は

$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}\\ -\mathbb{V}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & \mu\\ \lambda' & -\mu'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}\\ \mathbb{U}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ \nu'\end{bmatrix}\mathbb{K}, \tag{5}$$

ここに

$$\begin{bmatrix}\lambda & \mu\\ \lambda' & \mu'\end{bmatrix}=\mathbb{T}\bullet\begin{bmatrix}-\alpha & \beta\\ -\alpha' & \beta'\end{bmatrix}\bullet\mathbb{T},\qquad \begin{bmatrix}\nu\\ \nu'\end{bmatrix}=\mathbb{T}\bullet\begin{bmatrix}\gamma\\ -\gamma'\end{bmatrix}, \tag{6}$$

$\mathbb{I}$ は力の射影子で，$\mathbb{J}$ は変位の射影子である．
骨組の任意の節点での力の釣合いを書いて，式(5)を使い，所要の最終方程式を次の形にうる：

$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 & & & \\ \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2 & & \\ & -- & -- & -- & \\ & & & \mathbb{A}_n & \mathbb{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbb{U}\}_1 \\ \{\mathbb{U}\}_2 \\ -- \\ \{\mathbb{U}\}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\mathbb{P}\}_1 \\ \{\mathbb{P}\}_2 \\ -- \\ \{\mathbb{P}\}_n \end{bmatrix} = 0. \qquad (7)$$

式(7)の全剛性マトリクスは三軸型であるから，小さい core で漸化方式で解ける．このさい，経験によるにプログラムからの誤差集積がない．この汎用プログラムをOPERAと名付ける．OPERAによる最も代表的な実例は，阪神公団の港大橋の場合であるが，この系は6次節点が708あった．定着スパンと吊スパンとの間には，20次の内的不静定量があって，切り離して解いてはならぬ系である．この系を三菱総合研究所のIBM370/165を借りて解いたが，CPUはわずか155秒であった．上記の繋ぎ部分の力学的条件のこともあるから，この種の複雑な系が解けるプログラムは，OPERAの他には，今日もまだ存在しないだろうと考える．（STRESS，FRANはどちらも解けないことが判っているが，仮りにNASTRANで解きえたとしても，きわめて高価になるだろう．）

なお第三著者石川は，要素変位方程式だけを core field にとるプログラムを完成している．これをInverseless OPERAという．これによれば，ごく小さいComputerでも立体骨組のかなりなものが解ける．Inverselessは(6×6)だけしかいらない．

振動解析は

$$\det \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 & & & \\ \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2 & & \\ & -- & -- & -- & \\ & & & \mathbb{A}_n & \mathbb{B}_n \end{bmatrix}_{\omega} = 0 \qquad (8)$$

を解くことになる．ω は円振動数である．式(8)を解くには，三軸はき出しの第1段階の最後のところで

$$\det \mathbb{B}_n' = 0 \qquad (9)$$

とするのがよい．

以上骨組構造解析 OPERA を中心にその特徴を述べたが，骨組構造解析の他に次のものがある：

(1)　有限要素法については，高次項を考慮した精密有限要素法で，板の面内応力および板の曲げ解析を精緻に進め，高い精度の有限要素法を開発し，シェル構造の解析も進めている．

(2)　応用数学的解析として，固有関数法がある．これは複素解析となり，各種境界条件による矩形板の曲げ解析，複合板の面内応力解析，平行四辺形板の曲げ解析，および直交異方性板の曲げ解析等において，理論および数値解析を進め，高い成果を得ている．

(3)　境界条件および初期条件のもとで，梁の振動の波動伝播の解析も進め，非常に興味ある数値結果を得ている．これは微分方程式の特性および境界条件より，複素解析にはならず，実数の固有関数法である．

(4)　有限変位理論で骨組構造の非線形解析を進め，興味ある数値結果を得ている．又非線形における解の収束性にすばらしいものがある．