I-10　弾性体の応力解析に対する一数値解法

大阪市立大学工学部　正員　倉田宗章
近畿大学 理工学部　正員 ○谷平 勉

まえがき。

３次元弾性体の数値解法の１つとして、いわゆるIntegral Methodと呼ばれるものがある。この方法は、弾性体の内部で、field equationを満足する厳密な連続解を用いて、境界の選点でその境界条件を満すように解析する方法で、２次元問題の解析について、E.R.A. Oliveira[1]が最初に実用的な解析を試み、穴あきシャイベの問題を解いてその方向の発展性を示唆した。その後国内では、丹羽、小林らによって、各方面への開拓が行なわれ、種々の計算例が発表されている。また岡村、島田[2]によって、３次元非軸対称問題への実際的な適用について、多くの例題について種々の検討が加えられてきたが、それらは一連の論文によって詳細に示されている。このIntegral Methodは弾性体の内部に調整力を加えて、任意の境界を作り出そうとするところに大きな特徴がある。この際この調整力によるSingularityの問題を避けるため、一般には実境界面より幾分離れたところに、調整面なるものを設け、そこに調整力を加えることにより、実際の境界面の選点でその境界条件を満足させるという選点法を併用した方法によって解かれている。この調整力としては、一般には無限体中に集中力を作用させる、Kervinの解が使われるが、岡村の方法では、実際の境界面のうちの載荷されている面（この載荷状態を満す特解としては、Boussinesq, Cerrutiの解などが使われる）を調整力によって乱さないために、その調整力として、半無限体中に集中力の作用するMindlinの解が使われている。これによって境界処理の手数が軽減するなど、この方法自身を実用的なものにせしめた大きな要因となっている。と考えられる。しかしながらこの種のIntegral Methodの１つの問題点として、調整面と実際の境界面との間のきょりの取り方が、物体の形状、荷重状態等によってその最適値が一定でなく、その選定には、かなりの熟練とデータの集積が必要であるということが挙げられよう。

一方、M. Hetenyi[3,4]が特解と特解を組合せて、弾性体内に自由境界を作る問題を解いている。これは調整力として、Kervin解や、Mindlin解を用いて物理的に境界面を作り出そうというのではなく、弾性体中で自由境界面を作り出そうとする面を表面とする、Boussinesqの解を重ね合せて、（すなわち半無限体を２つオーバーラップさせて、それらの解を重ね合せる）、結果として所要の応力境界を作り出そうという方法で、調整面という概念は必要でなく、従ってSingularityの問題も一般には発生しない。M.HetenyiはQuarter Spaceの問題を、鏡像原理を使って、直応力だけを調整するという方法で、途中、無限重積分をIterativeなテクニックを使って解を得ている。しかしこれとてQuarter Spaceでなくなれば、鏡像関係をうまく使えなくなり、直応力とせん断応力の両方を調整しなければならなくなり、積分もうまくいかないので厳密には解けなくなる。しかしこの発想は、例えば２次元の問題で、PC桁の締結部での集中力による応力分布を、R.N. Gerstner[5]等が解析解と近似解法（この場合差分法）を組合せた方法で解いた例があるように、Hetenyiの方法でも、更に一般的に発展させようと思えば、直応力とせん断応力を同時に調整する問題となり、数値積分とか、選点法等のような近似解析の手段を併用すれば、実用面からみて、十分価値のある解が得られるだろう。

ここで述べようとしている解法は、Integral Methodにおける岡村の方法と、Hetenyiの半無限体をオーバーラップさせるという方法の利点を組合せようとするもので、岡村の方法の面からみると、調整面というのが必要でなくなり、直接、作ろうとする境界面に、調整力として、Boussinesq、Cerrutiの解のような、自由境界面に任意の力が働いた場合の解を使うということ、またHetenyiの方法の面からみれば、近似的方法として数値積分と選点法などを用いて、更に一般的な形状のものに適用できるものにしようということである。この種の方法の場合、ふつう、連立方程式系になる場合が多いが、この方法では、応力緩和法、もしくは、応力分配法とでも呼べるよ

うな、Iterative な手段が、直感的に理解しやすい方法で組立てるができる。

解法：

一般に弾性体中に自由境界面を作ろうとする際には、そこに働く、直応力とせん断応力の2種の力を0に調整しなければならない。従って、本解法で使用する特解というのは、自由境界面にすい直方向力と接線方向力が働く場合の解で、そういう解が存在するような物体の表面の面を組立てて構成できる物体を解くことができる。

例えば、半無限体がある角度でオーバーラップした図1のような Sector Space の場合について、Iterative Method を使う方法を説明する。まずA面を基準として x, y, z 座標系を考え、そのA面を自由面とする半無限体に荷重が載るとする。B面を基準に x', y', z' 系の座標を考える。まず① x, y, z 系でPによる Boussinesq の解よりB面の位置に作用する応力を求め，x', y', z' 系に変換し S_0' (σ_z', τ_{xz}', τ_{yz}') を得る。次に② B面に働く $-S_0'$ によるA面の位置の応力を得るため、x', y', z' 系での Boussinesq Cerruti の解を $-S_0'$ について数値積分して得た応力を x, y, z 系に変換して S_1 (σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}) を得る。更に③ $-S_1$ による S_1' を求める。これを繰り返して $S_2, S_2', S_3, S_3' \cdots$ を逐次計算し、$\Sigma S_i, \Sigma S_i'$ ($i=1,2,3\cdots$) が収束するまで行う。$\Sigma S_i, \Sigma S_i'$ が A, B面で調整すべき力の総和となる。ゆえに、任意点の応力は半無限体AにPおよび $-\Sigma S_i$ の作用した解に、Bに $-\Sigma S_i'$ が作用した解を重ね合すことにより得られる。このように Infinite な物体を解く場合には、連立方程式系にすると、莫大な計算機の容量を要するが、繰返し法なら、小容量の計算機で時間さえかければできる。逆に有限体の場合であれば例えば図2のように、正四角柱だと、対称性を利用して未知数はへらせるし、鏡像関係を使えばせん断応力の未知数もへらせるので、現実的な元数におとすことができるが、未知力の影響値を計算するのに相当量の時間を要する。従ってこのような場合、繰り返し法なら各ステップでの計算が多くなるので、連立方程式によって解くのが良策となる

なお、2, 3の計算例について、講演時に述べるつもりである。

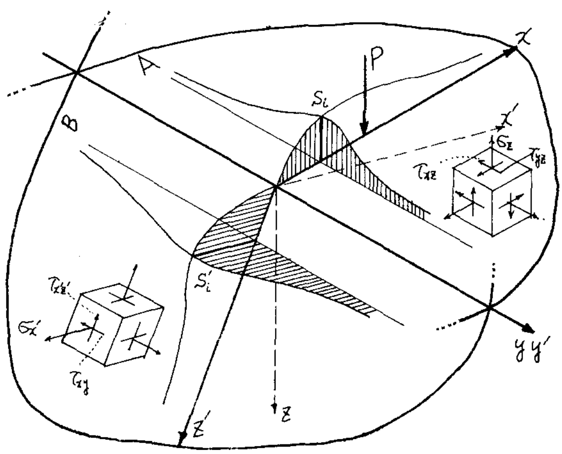

図1

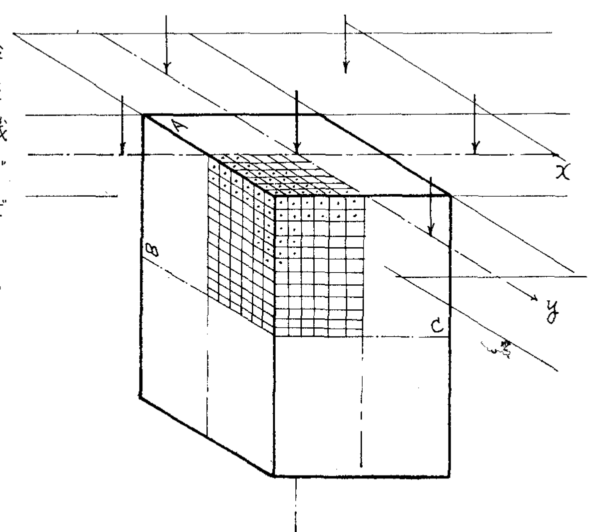

図2

1) Oliveira, E.R.A., "Plane Stress Analysis by a General Integral Method", Proc. A.S.C.E. Vol. 94. EM 1. 1968 pp79~101.

2) 例えば、岡村宏一、島田功 "3次元弾性問題の一数値解法とその応用" 土木学会論文報告集 No.199. 1972. pp33~43.

3) Hetenyi, M., "A General Solution for the Elastic Quarter Space." J of Applied Mechanics. Vol. 37. 1970、pp70~76.

4) Hetenyi, M, "A Method of Solution for Elastic Quarter Plane," J of Applied Mechanics, Vol. 27. 1960. pp289~296.

5) Gerstner, R.W. & Zienkiewicz, O.C. "A Note on Anchorage Zone Stress." Proc. A.C.I. vol 159. 1962. pp970~975