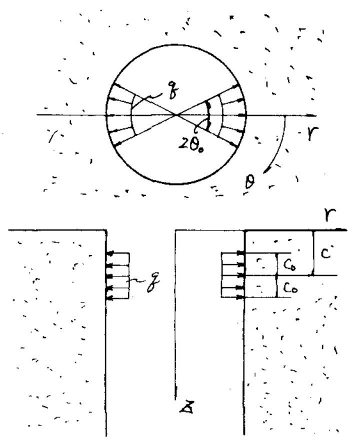
I-9　円孔のある半無限体の3次元応力解析について

北海道大学　正員　能町純雄
室蘭工業大学　正員　○松岡健一

1. まえがき　著者等は先に無限体中の円孔に部分荷重が作用するときの応力解析を行なったが[1]，ここでは，これを半無限体の問題とし，半無限体中に円孔がある場合，この円孔周辺に部分荷重が作用する場合の問題を非軸対称3次元問題として取扱った。数値計算では，荷重位置を変化させ無限体の場合との比較を行なった。

2. 円孔をもつ半無限体のFourier−Hankel変換による解　図－1に示すように，r，θ，z座標を半径方向，円周方向，円孔軸方向にとり，それぞれの方向の変位をu，v，wとする。このときの非軸対称問題の解はFourier−Hankel変換を用いると，次のようになる。



図－1

$$u=\frac{1}{\pi}\sum_m c_m\left(A_{mrz}+B_{mrz}\right)\cos m\theta \quad (1),\qquad v=\frac{1}{\pi}\sum_m\left(A_{mrz}-B_{mrz}\right)\sin m\theta \quad (2),$$

$$w=\frac{1}{\pi}\sum_m c_m\cos m\theta\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos nz\left[G_m(nr)D_{mn}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\frac{1}{n}F_m(nr)\right.\right.$$
$$\left.\times\left\{\beta_{mn}+2\mu\left(\frac{m+1}{a}A_{mn}-\frac{m-1}{a}B_{mn}-nD_{mn}\right)\right\}\right]dn$$
$$-\int_0^\infty\frac{\xi H_m(\xi r)}{\Theta^2_{m\xi}}\left[\frac{1}{\mu}\phi(\xi z)\left\{\frac{1}{\xi}\gamma_{m\xi}+\mu\left(E^a_{m\xi}-E^b_{m\xi}\right)\right\}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\right.$$
$$\left.\times\left\{\phi(\xi z)-\psi(\xi z)\right\}\left\{\frac{1}{\xi}\gamma_{m\xi}+2\mu\left(E^a_{m\xi}-E^b_{m\xi}\right)\right\}\right]d\xi \quad (3),$$

$$A_{mrz}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin nz\left[\frac{1}{2\mu}\frac{1}{n}\chi_{mp}(nr)\left\{\alpha_{mn}+\beta_{mn}+4\mu\frac{m+1}{a}A_{mn}-\mu nD_{mn}\right\}-\frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}\frac{1}{n}\omega_{mp}(nr)\left\{\beta_{mn}\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\mu\left(\frac{m+1}{a}A_{mn}-\frac{m-1}{a}B_{mn}-nD_{mn}\right)\right\}\right]dn+\int_0^\infty\frac{\xi H_{m+1}(\xi r)}{\Theta^2_{m\xi}}\left[-\frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}P(\xi z)\left\{\frac{1}{\xi}\gamma_{m\xi}+2\mu\left(E^a_{m\xi}-E^b_{m\xi}\right)\right\}+Q(\xi z)E^a_{m\xi}\right]d\xi \quad (4),$$

$$B_{mrz}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin nz\left[\frac{1}{2\mu n}\chi_{ms}(nr)\left\{-\alpha_{mn}+\beta_{mn}-4\mu\frac{m-1}{a}B_{mn}-\mu nD_{mn}\right\}-\frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)n}\omega_{ms}(nr)\left\{\beta_{mn}+2\mu\left(\frac{m+1}{a}A_{mn}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{m-1}{a}B_{mn}-nD_{mn}\right)\right\}\right]dn+\int_0^\infty\frac{\xi H_{m-1}(\xi r)}{\Theta^2_{m\xi}}\left[\frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}P(\xi z)\left\{\frac{1}{\xi}\gamma_{m\xi}+2\mu\left(E^a_{m\xi}-E^b_{m\xi}\right)\right\}+Q(\xi z)E^b_{m\xi}\right]d\xi \quad (5)$$

ただし，$c_m=1\ (m\neq 0)$，$c_m=1/2\ (m=0)$，aは円孔の半径であり，μ，λはLaméの定数である。また

$$\alpha_{mn}=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \tau_{r\theta})_{r=a}\sin m\theta\sin nz\,d\theta dz \quad (6),\qquad \beta_{mn}=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \sigma_r)_{r=a}\cos m\theta\sin nz\,d\theta dz \quad (7),$$

$$A_{mn}=\int_0^\infty A_{mrz})_{r=a}\sin nz\,dz \quad (8),\quad B_{mn}=\int_0^\infty B_{mrz})_{r=a}\sin nz\,dz \quad (9),\quad D_{mn}=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} w)_{r=a}\cos m\theta\cos nz\,d\theta dz \quad (10),$$

$$\gamma_{m\xi}=\int_0^{2\pi}\int_a^\infty \sigma_z)_{z=0}\, rH_m(\xi r)\cos m\theta\,dr d\theta \quad (11),\quad E^a_{m\xi}=\int_a^\infty A_{mrz})_{z=0}\, rH_{m+1}(\xi r)dr \quad (12),\quad E^b_{m\xi}=\int_a^\infty B_{mrz})_{z=0}\, rH_{m-1}(\xi r)dr \quad (13),$$

$$H_j(\xi r)=J_j(\xi r)Y_m(\xi a)-J_m(\xi a)Y_j(\xi r)\ \text{for } j=m-1,m,m+1,\qquad \Theta^2_{m\xi}=\{J_m(\xi a)\}^2+\{Y_m(\xi a)\}^2$$

$$G_m(nr)=\frac{K_m(nr)}{K_m(na)},\quad \chi_{mp}(nr)=\frac{K_{m+1}(nr)}{K_m(na)},\quad \chi_{ms}(nr)=\frac{K_{m-1}(nr)}{K_m(na)},\quad \omega_{ms}(nr)=nrG_m(nr)$$
$$-na\chi_{ms}(nr)\chi_{mp}(na),$$

$$F_m(nr)=nr\chi_{mp}(nr)-naG_m(nr)\chi_{mp}(na),\quad \omega_{mp}(nr)=nrG_m(nr)-na\chi_{mp}(nr)\chi_{ms}(na),$$

$$Q(\xi z)=\phi(\xi z)=e^{-\xi z},\quad P(\xi z)=\psi(\xi z)=\xi z e^{-\xi z}$$

3. 境界条件　式(1)～(5)中のα_{mn}，β_{mn}，A_{mn}，B_{mn}，D_{mn}，$\gamma_{m\xi}$，$E^a_{m\xi}$，$E^b_{m\xi}$は境界条件を満足するように定められる積分定数であるが，まず，式(8)，(9)に示すようにこの条件を式(4)，(5)を用いて満足さ

せなければならない，さらに各境界面にせん断力はないものとすれば，

i) $\tau_{r\theta}=0$ for $r=a$ $\therefore \alpha_{mn}=0$ (14)， ii) $\sigma_r=p(\theta,z)$ for $r=a$ $\therefore \beta_{mn}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}p(\theta,z)\cos m\theta \sin nz\, d\theta dz$ (15)，

iii) $\tau_{rz}=0$ for $r=a$ (16)， iv) $\sigma_z=0$ for $z=0$ $\therefore \gamma_{m\xi}=0$ (17)， v) $\tau_{zr}=\tau_{z\theta}=0$ for $z=0$ (18)

以上の条件より未知積分定数は A_{mn}, B_{mn}, D_{mn}, $E^a_{m\xi}$, $E^b_{m\xi}$ となり，これらを式(8)，(9)および(16)，(18)から求めることとなるが，式(16)および(18)は

$$\{\chi_{mp}(na)+m/na\}\beta_{mn}+2\mu\{\chi_{mp}(na)(m+1)A_{mn}-\chi_{ms}(na)(m-1)B_{mn}\}/a-(\mu+\lambda)/(2\mu+\lambda)\,\omega_{mp}(na)\{\beta_{mn}+2\mu/a\times$$

$$\times((m+1)A_{mn}-(m-1)B_{mn}-aD_{mn})\}-\int_0^{\infty}\frac{\xi H_{m+1}(\xi a)}{\Theta^2_{m\xi}}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{n^2\xi}{(n^2+\xi^2)^2}2\mu\xi(E^a_{m\xi}-E^b_{m\xi})\,d\xi=0 \qquad (16')$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}H_{m+1}(\xi a)\Big[-\frac{n}{n^2+\xi^2}\{\beta_{mn}+4\mu(m+1)A_{mn}/a\}+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\cdot\frac{n\xi^2}{(n^2+\xi^2)^2}\{\beta_{mn}+2\mu((m+1)A_{mn}/a-(m-1)B_{mn}/a-D_{mn}\}\Big]dn$$

$$-\mu\xi(E^a_{m\xi}+E^b_{m\xi})-(\mu+\lambda)/(2\mu+\lambda)\cdot 2\mu\xi(E^a_{m\xi}-E^b_{m\xi})=0 \qquad (18'\text{-}1)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}H_{m+1}(\xi a)\Big[\frac{n}{n^2+\xi^2}\{\beta_{mn}-4\mu(m-1)B_{mn}/a\}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{n\xi^2}{(n^2+\xi^2)^2}\{\beta_{mn}+2\mu((m+1)A_{mn}/a-(m-1)B_{mn}/a-D_{mn}\}\Big]dn$$

$$-\mu\xi(E^a_{m\xi}+E^b_{m\xi})+\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\xi(E^a_{m\xi}-E^b_{m\xi})=0 \qquad (18'\text{-}2)$$

式(8)，(9)，(16′)，(18′-1)，(18′-2)は上のように5元の連立積分方程式となり数値積分を用いて解くことになる。

4. 数値計算　以上により数値計算を行なった。計算は，$\mu=\lambda=0.4$，載荷巾 $C_0=0.4a$，$\theta_0=0.4$ で，荷重位置 C を変化させて行なった。積分定数の決定および変位，応力計算とも数値積分は，n，ξ について 20π まで48点をとり，また m の級数は偶数項のみ6項すなわち $m=10$ までとった結果である。結果は $r=a$ および $z=0$ の面の応力は十分収束はしていないが，他の断面では，かなり良く収束している。図-2には $r=a$，$\theta=0$ における半径方向変位 u の z 方向の変化を無限体の場合（点線）の結果と対比して示したものであるが，荷重が $z=0$ の面より荷重巾位離れて作用すれば，無限体の場合の比較してそれ程の差はないようである。図-3には $r=C_0$，$\theta=0$ における σ_r の z 方向の分布をやはり無限体の場合（点線）と比較して示した。この場合も荷重が $z=0$ の面より荷重巾位離れいればかなり無限体の場合に近いことを示している。

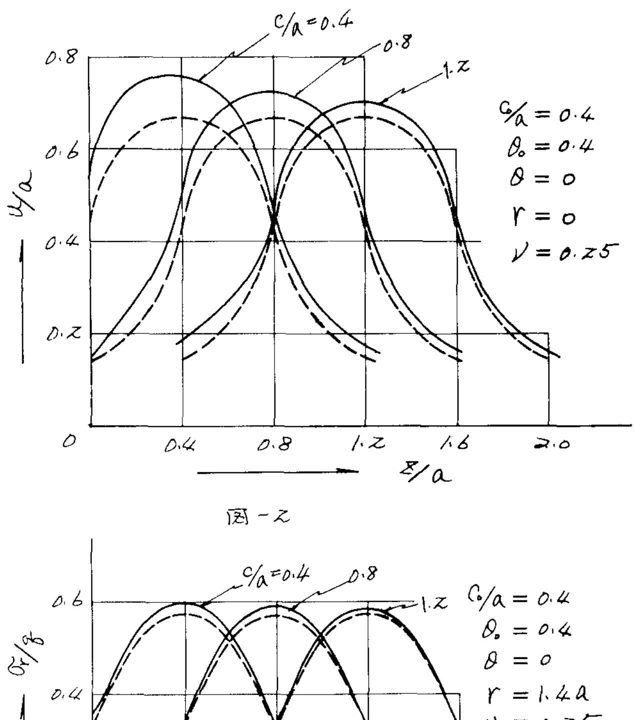


図-2

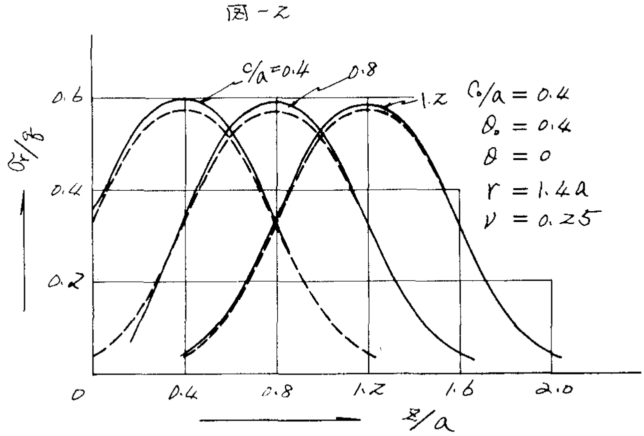


図-3

※ 参考文献

1). 松岡・能町；無限体中の円孔に部分分布荷重が作用するときの3次元応力解析，土木学会論文報告集，229号

2). K.A.Blenkarn・J.C.Wilhoit；Stresses due to a Band of Normal Stress at the Entrance of Circular Hole，J. Applied Mechanics Dec. 1962