

大阪工業大学

正員 ○岡村宏一

東洋技研コンサルタント

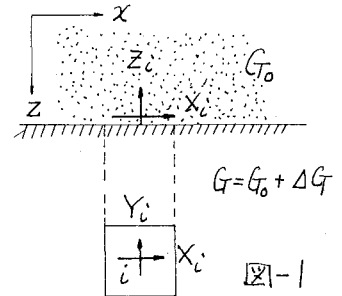
正員 島田 功

1. まえがき： 近年、計算手段の発達とともに、かつては難解とされていた3次元問題の分野においても、かなりの研究例が見受けられるようになった。しかし、実用面では、この種の問題に特有の障害；未知量の著しい増大や、それにとまらぬ精度の問題、あるいはパラメーターの多様さなどによって、広範囲のデータを採取するには、相当の負担を余儀なくされるきらいがある。このような煩雑さを回避するために、しばしば2次元あるいはそれに準じた解析が行なわれ、それなりの評価を与えているが、1次近似的な弾性モデルにおいても、必ずしも3次元解析を必要とする場合が少いわけではなく、実用的に容認される精度の範囲内で、未知量を圧縮し、解法を簡易化する工夫が必要になる。

さて、筆者はすでに、部分的に剛性の異なる3次元弾性体の1つの数値解法を提案した。¹⁾ この方法は、等方弾性体に関する解析解を利用するもので、剛性の異なる部分の特性は仮想体積力に置換され、未知量はこの部分のみに制約される。すなわち本解法は本質的に、連続解を基底に置いて精度を高め、かつ未知量を制約できる性質を持っている。また、3次元体内に作用させるこのような体積力の影響が、離れた個所ではしばしば急激に減少するので、その影響範囲を制限して、計算容量を圧縮することもできる。^{2,4)} そこで、解法の簡易化をさらに助長するため、これまでの解析上の経験をもとに若干の近似的な仮定を導入し、2,3の考察を加えてみた。

2 解法の簡略化： いま、等方弾性体(G_0)に、剛度の異なる部分(G)が連続しているとき、この部分の釣合方程式は次の形に書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (G \varepsilon_x + \frac{G\nu}{1-2\nu} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y} (G \gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \gamma_{xz}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (G \varepsilon_y + \frac{G\nu}{1-2\nu} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} (G \gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \gamma_{yz}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (G \varepsilon_z + \frac{G\nu}{1-2\nu} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} (G \gamma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (G \gamma_{yz}) &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$



ここで、剛性の異なる部分を等剛度の等方性とし、また母体とこの部分のポアソン比の差異による影響を無視すると、(1)は母体の釣合方程式として次の形になる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 u &= \frac{G_0}{(G + \Delta G)^2} \left(\sigma_x \frac{\partial G}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial G}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \bar{X} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= \frac{G_0}{(G + \Delta G)^2} \left(\tau_{xy} \frac{\partial G}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial G}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \bar{Y} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= \frac{G_0}{(G + \Delta G)^2} \left(\tau_{xz} \frac{\partial G}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial G}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \bar{Z} \end{aligned} \right\} (2)$$

(2)は右辺は仮想体積力の密度を表わすが、いま G が一定で、かつ図-1のように Z 方向に急変($G = G_0 + \Delta G$)する場合に

$$\bar{X} = \int_{z-a}^{z+d} \frac{G_0}{\{G_0 + \Delta G \cdot f(x)\}^2} \tau_{xz} \times \Delta G \delta(x) dx = \frac{\Delta G}{G_0 + \Delta G} \tau_{xz} \quad (3)$$

\bar{Y} , \bar{Z} も同様に求められ、この場合、図の境界面の有限領域(i)には3種類の平面力 X , Y , Z が仮定され、

1) 土木学会論文報告集；No.212, pp.11~24 2) 土木学会論文報告集；No.199 pp.33~43,
3) 才29国土木学会講演会概要-I；pp.18~20 4) 土木学会関西支部講演概要(昭50) pp.I-1~I-3.

これらの量は、その位置 \$k\$ における \$3\$ コの応力成分 \$(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z)\$, もしくはこれらに対応するひずみ成分 \$(\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \bar{\epsilon} = \epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon)\$ を未知量として定まる。また、未知量を定める式は、すでに前論文で述べたように、たとえばひずみで表わすと

$$\epsilon_v = \sum_i (X_i \int \epsilon_z dA + Y_i \int \epsilon_z dA + Z_i \int \epsilon_z dA) \quad (4)$$

となり、ここで各積分項は Mindlin 解を利用して単位の平面力として与えられる。

以上のようにこの種の問題において、両着のポアソン比の差異による影響を無視すれば、両着の境界面上の選点に \$3\$ コの未知量を持つ仮想平面力を考えればよく、それぞれ部分に属する剛性マトリックスを作成する必要もない。またこれらの平面力の影響範囲を限定して、解析をさらに簡略化することもできる。

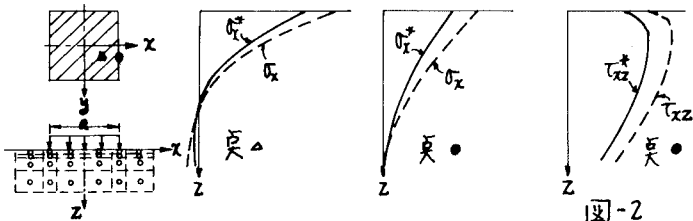
つぎに、剛性の異なる部分が剛性の勾配、あるいは異方性を持つ場合には、母体に対する剛性の偏差によって内部にも仮想積力を考えてやらねばならない。いま、この部分の応力成分を

$$\{\sigma\} = [D_0]\{\epsilon\} + [\Delta D]\{\epsilon\}, \quad \sigma^* = [\Delta D]\{\epsilon\} \quad \Delta D: \text{剛性の偏差}$$

と表わすと、(2)の右辺はこの場合、

$$\bar{X} = \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z}, \quad \bar{Y} = \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z}, \quad \bar{Z} = \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} \quad (5)$$

となる。ここで \$\sigma^*\$ は求める真の応力 \$\sigma\$ とは異なるものであるが、いままでに行った若干の解析の経験によれば、\$\sigma^*\$ の分布形は \$\sigma\$ のそれと著しく異った特異なものにはならないようである。1例として、図-2 は表面荷重と受ける半無限体の荷重面の直交異方性柱を埋めこんだ場合の両着の分布形を比較したものである。このような事実から考えると、工学的な判断によって不均質な部分の選点を比較的粗く配置し、解析解を用いる本解法の利便を生かして、未知量をより一層圧縮することができると考えられる。



いま、図-3 に示すような \$\sigma^*\$ の分布を考えると、選点 \$(i)\$ と \$(i-1)\$ の間にある角柱 \$(f_e)\$ における

$$\sigma^* \text{ は } \sigma^* = \sigma_i^* + \frac{\sigma_{i+1}^* - \sigma_i^*}{h} z$$

この部分で考慮される仮想積力の密度分布は、図-3 に示す各選点を含んだ水平面に関して差分法を併用することにより次のように表わされる。

$$\bar{X} = \frac{\Delta \sigma_{x,i}^*}{\Delta x} + \frac{\Delta \tau_{xy,i}^*}{\Delta y} + \frac{\tau_{xz,i+1}^* - \tau_{xz,i}^*}{h} + \frac{z}{h} \left\{ \frac{\Delta}{\Delta x} (\sigma_{x,i+1}^* - \sigma_{x,i}^*) + \frac{\Delta}{\Delta y} (\tau_{xy,i+1}^* - \tau_{xy,i}^*) \right\} \quad (6)$$

\$\bar{Y}\$, \$\bar{Z}\$ も同様に与えられる。したがって角柱 \$(f_e)\$ について考慮される仮想積力はたとえば図-3 のように、一応分布のもの \$(N)\$ と、回転を与えるもの \$(M)\$ からなり、これらの単位の量は Mindlin 解の適当な積分によって与えられる。またこの場合、未知量は選点を含んだ水平面のみに存在し、計算容量を圧縮することになる。なお、このような方法は、工学的判断を加味することによって次元体の内部に異方性平板などが含まれる場合にも適用できると考えている。講演時、簡略化とそれにもとまう精度の問題に関連した基本的な計算例を示す。