I-7　高異方性材料の力学的近似解析に関する二,三の基礎的考察

山梨大学・工学部　正員　平島健一
○ 京都大学・大学院　学生員　北原道弘

1. まえがき

近年，その使用性の増大を呈しつつある繊維複合材料（Fiber Reinforced Composite Materials，以下ではF.R.C.M.と略す）に対する力学的解析手法がさまざまな形で提案されている。すなわち，この種の材料の力学的取り扱いに対する理想化の一つの考え方は非圧縮，非伸張と仮定することであり，1971年 Pipkin & Rogers[1] により形式化された。この仮定の特徴は singular fiber と normal-line の出現であり，これらは有限の力したがってその結果として無限の応力を受け，減衰なく遠方にまで力を伝達することになる。Everstine & Pipkin[2] の論文もこの二つの仮定にもとづいて展開したものであって，彼らは自由表面付近の高応力集中域の存在とその減衰長および層厚の尺度を与え，異方性厳密解の極限として，この singular fiber の存在の可能性を提示した。次の力学的取り扱いへのステップは材料を非伸張と仮定することであり，1973年 England ら[3] により，さまざまな解が示された。この解の特性は Laplace 型の微分方程式に支配される y 方向変位 v のみによる応力 σ_{yy} が完全解に対する第一近似となりうるものであり，また normal-line 付近の応力状態に対してよりよい近似となる。しかしながら，この理論をもってしても，singular fiber の出現は改善できない。この singular fiber の出現を解消するとともに，この応力不連続性を境界条件として，x 方向変位 u について解こうとするのが，第三の仮定：境界層(boundary-layer)手法である。この singular fiber 付近の boundary-layer の解析は1973年 Everstine & Pipkin[4] により，片持梁の問題に適用され，Laplace および Poisson型の方程式の解法として摂動手法が用いられた。この boundary-layer の概念を用いて，さらに1974年 Spencer[5] は平面ひずみ，平面応力をも含めて，伸張性，圧縮性を許す理論へと形式化を広めた。この境界層解は微小パラメータ：ε に支配されることになるが，これは異方性弾性体の厳密な支配方程式である重調和型の方程式の小さい方の特性根 ε_t に相当するものである。本研究は形式化を Spencer に合わせ上述の理想化理論Ⅱ（非伸張の仮定）および理論Ⅲ（境界層の存在の仮定）による応力が異方性の厳密式とどのような形で関係するかを検討考察したものである。なお，その際，この理論的過程を Fourier変換の形式で統一するとともに，基礎関数なるものを導入し，近似理論解ならびに重調和型支配方程式の厳密解を積分表示し，一般解形式で order 評価ならびに近似解と厳密解の一致性を議論したものである。

歴史的には，上述の応力特異層の存在の推定は1966年 M. A. Biot[6] により skin effect という形で取りあげられ，skin厚ならびに減衰長は異方性弾性係数比をパラメータとする二つの特性根に支配されることが示されており，基本的概念は上述の非伸張の仮定と境界層の存在の仮定による合成応力と同じである。

2. 平面異方性問題における一般関係式

x軸が fibers の方向で yz 面が等方性の面であるとした場合，次に示すような基礎関係式が成立する。

(a) 一般化構成関係式：　$\sigma_{xx}=Le_{xx}+Me_{yy}$，$\sigma_{yy}=Me_{xx}+Ne_{yy}$，$\sigma_{xy}=2\mu_L e_{xy}=2G e_{xy}$

(b) 釣合方程式：　$\sigma_{xx,x}+\sigma_{xy,y}=0$，$\sigma_{xy,x}+\sigma_{yy,y}=0$

(c) 適合方程式：　$e_{xx,yy}+e_{yy,xx}=2e_{xy,xy}$

(d) 支配方程式：　$A\Phi_{,yyyy}+B\Phi_{,xyxy}+C\Phi_{,xxxx}=0$　（一般化重調和型方程式）

三つの条件(a)～(c)を満たす応力関数 Φ の支配方程式(d)を基礎式として理論を進める一般的方法（厳密解法）とは異なり，近似化理論においては適合条件式(c)を無視して議論の展開がなされる。

[A] <u>近似理論Ⅱ（非伸張の仮定）</u>：非伸張の仮定から $u_{,x}=0$ ∴ $u=u(y)$，構成式 $\sigma_{xx}=T$，$\sigma_{yy}=Ne_{xx}=Nv(x,y)_{,y}$，$\sigma_{xy}=\mu_L\{u(y)_{,y}+v(x,y)_{,x}\}$ これらを釣合方程式に代入し，$c^2\equiv\mu_L/N$，$y_1\equiv cy$ とおいて整理すると v に関する方程

式 $v_{,xx}+v_{,y_1y_1}=0$ が立られる。 なお，この理論では σ_{xx} は構成式からではなく，釣合式の積分によって次のように決定されることに注意する必要がある。 $\sigma_{xx}=\bar{T}=-\mu_L[xu''(y)+v(x,y)_{,y}]+F_1(y)$

[B] 近似理論Ⅲ(境界層の存在の仮定)：方程式(a),(b) から変位で表わした釣合方程式が次のようにまる。

$$Lu_{,xx}+(M+\mu_L)v_{,xy}+\mu_L u_{,yy}=0,\quad \mu_L v_{,xx}+(M+\mu_L)u_{,xy}+Nv_{,yy}=0 \qquad ここで\ \varepsilon^2\equiv\mu_L/L,\ d^2\equiv\mu_L/M,\ c^2\equiv\mu_L/N$$

とおき微小パラメータ ε を用いて $\eta\equiv y/\varepsilon$ なる境界層変数 η を導入すると構成方程式(a)は次式で表示される。

$$\sigma_{xx}=\mu_L\left(\frac{1}{\varepsilon^2}u_{,x}+\frac{1}{\varepsilon d^2}v_{,\eta}\right),\quad \sigma_{yy}=\mu_L\left(\frac{1}{d^2}u_{,x}+\frac{1}{\varepsilon d^2}v_{,\eta}\right),\quad \sigma_{xy}=\mu_L\left(\frac{1}{\varepsilon}u_{,\eta}+v_{,x}\right)$$

変位表示の釣合式を ε, c, d で表わし結果を整理すると $u_{,xx}+u_{,\eta\eta}=0$ ， $v_{,\eta\eta}=0$ $(\because v=g(x)+\eta h(x))$ したがって，今度の理論においては u が x と η に関する調和関数ということになる。

[C] 解の接合：上述の二つの理論において変位 v [理論Ⅱによる] と変位 u [理論Ⅲによる] の2つの調和関数を接合(重ね合せ)して，適合条件式をも考慮した一般化重調和型方程式の結果に近づけることを考える。 すなわち， 理論Ⅱによる応力成分：$\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \sigma_{xy1}$， 理論Ⅲによる応力成分：$\sigma_{x2}, \sigma_{y2}, \sigma_{xy2}$ を重ね合せた近似合成解：$\sigma_{xx}=\sigma_{x1}+\sigma_{x2}$， $\sigma_{yy}=\sigma_{y1}+\sigma_{y2}$， $\sigma_{xy}=\sigma_{xy1}+\sigma_{xy2}$ を求める。

理論を進めるに当って，近似解，厳密解を通じて次式で示される基礎関数を導入する。

$$G_c(t,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikt}\cdot e^{-|k|y}dk=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos kt\cdot e^{-|k|y}dk=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{t^2+y^2},\quad G_s(t,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ik}{|k|}e^{ikt}\cdot e^{-|k|y}dk=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin kt\cdot e^{-|k|y}dk=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{t}{t^2+y^2}$$

3. 近似合成理論の一般解(平面ひずみを例にとる)

[A] Fibersに垂直な荷重 $p(x)$ のみ作用

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\sigma_{x1}+\sigma_{x2}=-c^2\int_{-\infty}^{\infty}G_c(t,y_1)p(x-t)dt+\frac{c}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}G_c(t,\eta)p(x-t)dt\\
\sigma_{yy}&=\sigma_{y1}+\sigma_{y2}=\int_{-\infty}^{\infty}G_c(t,y_1)p(x-t)dt-\frac{\varepsilon c}{d^2}\int_{-\infty}^{\infty}G_c(t,\eta)p(x-t)dt\\
\sigma_{xy}&=\sigma_{xy1}+\sigma_{xy2}=c\int_{-\infty}^{\infty}G_s(t,y_1)p(x-t)dt-c\int_{-\infty}^{\infty}G_s(t,\eta)p(x-t)dt
\end{aligned}\right\}$$

[B] Fibersの方向に作用する $\overbrace{S(x)}^{荷重}$ の場合

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\sigma_{x2}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}G_s(t,\eta)S(x-t)dt\\
\sigma_{yy}&=\sigma_{y2}=-\frac{\varepsilon}{d^2}\int_{-\infty}^{\infty}G_s(t,\eta)S(x-t)dt\\
\sigma_{xy}&=\sigma_{xy2}=\int_{-\infty}^{\infty}G_c(t,\eta)S(x-t)dt
\end{aligned}\right\}$$

この結果は弾性厳密解(一般化重調和型方程式の解)に導入される特性根 ε_t，ε_c を $\varepsilon_t\to\varepsilon$，$\varepsilon_c\to c$ とおくことにより，$p(x)$ の作用時においては完全に一致し，$S(x)$ の作用時においては境界層に対応する項において一致することになる。 故に誤差評価の基準は ε_t と ε，ε_c と ε の弾性定数間の関係式である。

この方式を敷衍して，半無限板の境界荷重(集中，分布，集中モーメント，せん断，鉛直荷重)ならびに内部荷重(境界荷重の場合と同様の種類)が作用する場合の具体的な式表示を近似解および厳密解をともども求め，その order 比較を行なってあるが，紙面の都合上ここでは割愛する。

4. むすび

材料の理想化に対する数学的解析手法のこの一連の流れについて，幾つかの指摘ができる。 近似理論[Ⅰ],[Ⅱ]で示されるように singular-fiber あるいは normal-line の出現は古典弾性論とは大なる相違をなす。 真の応力状態とは？ いわゆる厳密式なるものが現実の材料特性を表示しうるのか？ 少なくとも，ここで対象としたF.R.C.M.のような現実の異方性物質に対して St. Venant の原理の適用の限界がある —— あるいは適用に際して充分な注意を要することが指摘される。 数学的極限を物理的極限と解釈しなおすことの危険性を示してくれた。 異方性弾性論の出発点はあくまで等方等質物質からの拡張をその基本にしておりF.R.C.M.に対しても正当に適用できるか否かは check が必要である。 Spencerによる剛塑性体理論[7]による理想化の流れは完全剛→現実への接近をめざしたものであり古典弾性論の流れとは異質の出発点としたものである。……以下略……

5. 参考文献：

1) A.C. Pipkin & T.G. Rogers : J. Appl. Mech. Vol.38 (1971) p.364, 2) G.C. Everstine & A.C. Pipkin : ZAMP. Vol.22 (1971) s.825, 3) A.H. England & Others : J. Mech. Phys. Solids, Vol.21 (1973), p279, 4) G.C. Everstine & A.C. Pipkin : J. Appl. Mech. Vol.40 (1973) p518 5) A.J.M. Spencer : Int. J. Solids. Structurs. Vol.10 (1974) p1069, 6) M.A. Brot : Int. J. Solids Structures, Vol.2 (1966) p.645 7) A.J.M. Spencer : Deformations of Fiber-reinforced Materials, Clarendon Press (1972).