

1. まえがき

連続体の代表的離散化手法には、有限要素法と差分法がある。有限要素法は物理的離散化手法であり、電気回路網との間に明瞭なアナロジーが存在する為、グラフ理論の有限要素法への応用は多数みうけられるが、数学的離散化手法と考えられる差分法へのグラフ理論の応用は、シグナルフローグラフの応用<sup>1)</sup>以外は余り行なわれていないように思われる。本文では、シグナルフローグラフとは異った立場から、差分法のステイフネス・マトリックスを接続マトリックスを用いて表現し、グラフの木の性質を用い、差分方程式を解析する方法を説明し、次に、グラフ理論における接続マトリックスとループマトリックスと場の微分作用素との対応について述べる。

2. グラフの木の性質の差分法への応用

Poisson 方程式を例とし、グラフ理論の差分法への応用について説明する。周辺から張力  $S$  と面圧  $P(x, y)$  を受ける薄膜の撓み  $w(x, y)$  は Poisson 方程式(2.1)で表わされる。今面圧  $P$  は一定で境界上で  $U=0$  とする。図-2.1は、一辺の長さ  $h (=l/6)$  の正方形網目に分割された薄膜を示している。Laplace の微分作用素に対応する差分式のグラフ表示図-2.2を用い、対称性を考慮して、図-2.1の斜線部の力学的接続特性をグラフで表わせば、図-2.3となる。このグラフの接続マトリックスは式(2.2)で示される。グラフの枝の力学的特性を表わすマトリックス  $k_{\kappa\lambda}$  の成分は式(2.3)、また、分割点での面圧  $P_a$  は式(2.4)で記される。 $D_{ak}$  から点  $G$  に関する行を取り除いた接続マトリックスを  $D_{ak}$  と定義すれば、絶対変位  $W_a$  と相対変位  $U_\kappa$  との間には式(2.6)、 $P_a$  と薄膜内部に存在する力  $r_\kappa$  との間には式(2.5)が成立する。したがって、式(2.5)、(2.6)、(2.7)より式(2.8)が導びかれ、ステイフネス・マトリックス  $K_{ab}$  は式(2.9)によって定義される。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{P}{S} = 0 \quad (2.1)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		-1	1	-1	1	1	1	1	1
3				1	1	1	1	1	1
4					-1	1	-1	1	1
5						1	1	1	1
6							1	1	1
7								1	1
8									1
9									

(2.2)

$$\left. \begin{aligned} k_{11} = k_{22} = k_{33} = k_{44} = k_{55} = k_{66} = S \\ k_{77} = k_{88} = k_{99} = S/2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$(P_a) = \frac{P}{8}(4, 8, 4, 4, 4, 1) \quad (2.4)$$

$$(\frac{1}{h}) D_{ak} r_\kappa = P_a \quad (2.5)$$

$$(\frac{1}{h}) D_{ka} W_a = U_\kappa \quad (2.6)$$

$$k_{\kappa\lambda} U_\lambda = r_\kappa \quad (2.7)$$

$$K_{ab} W_b = P_a \quad (2.8)$$

$$K_{ab} = D_{ak} k_{\kappa\lambda} D_{\lambda b} \quad (2.9)$$

$$(K_{ab})^{-1} = f_{ba} / |K_{ab}| \quad (2.10)$$

$$|K_{ab}| = D_{[a_1 \dots a_m]} (m! k_{k_1 \lambda_1} \dots k_{k_m \lambda_m}) D_{[\lambda_1 \dots \lambda_m]} \quad (2.11)$$

$$f_{ba} = D_{[a_1 \dots a_m]} [m! m k_{k_1 \lambda_2} \dots k_{k_m \lambda_m}] D_{[\lambda_2 \dots \lambda_m]} \quad (2.12)$$

	1	2	3	5	7
1	1	1	1	1	1
2		-1	1	1	1
3				1	1
5					-1
7					

(2.13)

一般に、式(2.9)の形式のマトリックスの逆マトリックスを式(2.10)のように記せば、 $|K_{ab}|$  及び  $f_{ba}$  は Binet-Cauchy 展開<sup>2)</sup>を用い、それぞれ式(2.11)、(2.12)と表現される。したがって  $|K_{ab}|$  は左右指標がそれぞれ木となるような  $m$  個の  $k_{\kappa\lambda}$  の積  $k_{k_1 \lambda_1}, k_{k_2 \lambda_2}, \dots, k_{k_m \lambda_m}$  の全ての代数和(符号は  $D_{[a_1 k_1 k_2 \dots k_m]} / D_{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]}$ )によって与えられ、 $f_{ba}$  は左指標が  $a$  点と  $G$  点を同一点としたグラフの木となると同時に、右指標もまた、 $b$  点を  $G$  点と同一点としたグラフの木となると同時に、 $k_{\kappa\lambda}$  の全ての組合せの代数和(符号は  $D_{[a_1 k_1 k_2 \dots k_m]} / D_{[\lambda_2 \dots \lambda_m]}$ )として表現される。図-2.3のグラフの全ての木を求め、直接式(2.10)、(2.11)

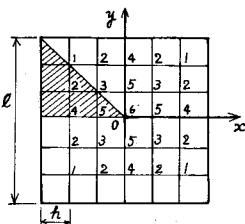


図-2.1

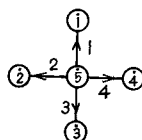


図-2.2

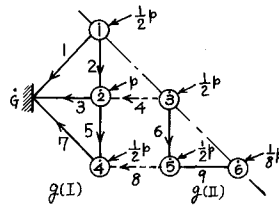


図-2.3

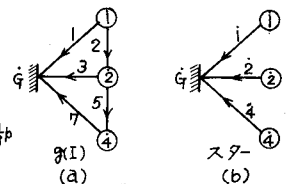


図-2.4

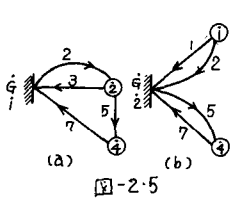


図-2.5

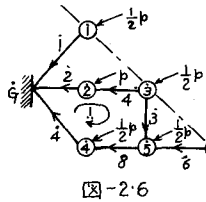


図-2.6

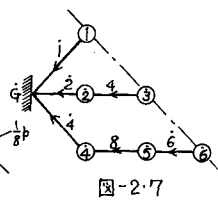


図-2.7

$${}^*K_{ab} = D_{1a} k_{23} D_{2b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdot \\ -1 & 3 & -1 \\ \cdot & \cdot & 3/2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$t: 125, 127, 135, 137, 235, 257, 157, 237 \quad (2.15)$$

$$t: 27, 25, 35, 37, 57 \quad (2.16)$$

$$t: 15, 17, 25, 27 \quad (2.17)$$

$$({}^*K_{Iab})^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$({}^*K_{IIab})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$({}^*R_{ab}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 8 & 3 & 3 \\ \cdot & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$({}^*F_{kab}) = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 6 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 11 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 22 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 22 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$({}^*B_{ab}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$U_b = F_{ba} P_a \quad (2.23)$$

$$F_{ba} = B_{bk} \{ \delta_{k1a} - R_{k1P}, R_{k2P}, R_{k3P}, R_{k4P}, R_{k5P}, R_{k6P} \} B_{k1a} \quad (2.24)$$

$$U_b = \left( \frac{99}{104}, \frac{73}{52}, \frac{17}{8}, \frac{20}{13}, \frac{61}{26}, \frac{135}{52} \right) \frac{p h^2}{S} \quad (2.25)$$

(2.12)によって解析することも可能であるが、ここでは Kron の提案した「ダイヤコネクティクス」を用いて解析することを考え、図-2.3のグラフの枝4,8を除去し、実線で示した部分グラフ $g(I)$ ,  $g(II)$ に分割する。部分グラフ $g(I)$ のステフネス・マトリックスは、このグラフの接続マトリックス(2.13)と各枝の力学的接続特性を用いて式(2.14)によって表わされ、図-2.4(a)の全ての木を求めれば(2.15)となり、 $|K_{Iab}^*| = 1/2$ を得る。 $f_{11}$ は点1と点6を同一点としたグラフ図-2.5(a)のグラフの木(2.1)を用い $f_{11} = 7/2$ 、また $f_{12}$ は木(2.16)と点2と点6を同一点とした図-2.5(b)のグラフの木(2.17)との共通集合を用い $f_{12} = 3/2$ となる。以下同様にして式(2.18)を得る。図-2.4(a)のグラフを(b)に示すスターで置きかえ、スターの枝には点1, 2, 4と同じ番号をつける。部分グラフ $g(II)$ は、すでにスターであるから、容易に式(2.19)が求められる、同様にスターの枝には点3, 6と同じ番号をつける。このようにして求めた2つのスターを枝4, 8を用いて、再び接続すれば、1個のループを有する図-2.6に示すグラフを得る。このグラフのループ・マトリックスは、式(2.20)で表わされる。部分グラフ $g(I)$ ,  $g(II)$ と枝4, 8に対応するフレキシビリティ・マトリックスから式(2.21)が求められる。図-2.3のグラフの1つの木(図-2.7)を用い、node-to-datum path マトリックス(2.22)を定義すれば、 $U_b$ と $P_a$ の関係は式(2.23), (2.24)で与えられ、式(2.4)に対して変位(2.25)を得る。

3. グラフの接続マトリックス及びループマトリックスと微分作用素の対応

グラフの接続マトリックス、ループマトリックスと場の微分作用素  $div$ ,  $grad$  との対応について説明する。式の形より明らかのように式(2.5)は各分割点における平衡条件を表わしており、また式(2.6)は、各分割点相互間の  $x$  及び  $y$  方向の勾配を示している。今、 $\delta_{2a}$  をクロネッカーのデルタとすれば、式(2.2)を用い

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (\delta_{2a} D_{ak} D_{kb} U_b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (w_1 + w_6 + w_3 + w_4 - 4w_2) = \Delta w \Big|_{\substack{x=x_2 \\ y=y_2}} = div grad w \Big|_{\substack{x=x_2 \\ y=y_2}}$$

を得る。したがって、 $D_{ak}$  及び  $D_{ka}$  はそれぞれ微分作用素  $div$ ,  $grad$  に対応する性質を有している。ループマトリックスと  $rot$  との対応も容易に示すことができるがここでは省略する。

4. あとがき

差分法に対しても、力学的接続特性を考察することによって、有限要素法と同様にグラフ理論の応用が可能であることを示した。また、グラフの接続マトリックス、ループマトリックスと場の微分作用素との対応は、離散的な粒子の集合体のマクロ的な性質を微分方程式として表現するために応用可能なら思われる。

参考文献 (1) Feng, C.C. & Stead, K.A.: On Finite Difference Analysis by Linear Flow Graphs, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, vol. 2, ed. by W.A. Shaw, Pergamon Press, 1965, pp. 591-603  
 (2) 小野寺・大類: 電気回路網と接続理論, 森北, 1973, (3) Kron, G.: Diacoptics, Macdonald, 1963.  
 (4) 佐武・新開: グラフ理論における木の性質のマトリックス構造解析への応用, 日本鋼構造協会第9回大会研究発表マトリックス構造解析法研究発表論文集, 1975, pp.1-6